

UNIVERSIDAD DE SANTANDER

**ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIEROS
DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS**

Departamento de Análisis de las Estructuras

**CURSO BASICO DE PROGRAMACION
DEL
METODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS**

AVELINO SAMARTIN

JULIAN DIAZ DEL VALLE

Publicación AE 84.2

PROLOGO

Estas notas que se publican a continuación corresponden a un curso de postgrado impartido durante el primer semestre del año 1983. El interés mostrado por los asistentes a dicho curso nos ha animado a escribir un resumen de las clases.

Este libro supone un conocimiento teórico de las ideas básicas del método de los elementos finitos. No obstante en una primera lección se resumen y ordenan aquellos aspectos mas importantes, que serán utilizados en lecciones sucesivas. En estas se desarrolla un programa de computador muy sencillo -sin complicaciones informáticas que oscurezcan la simplicidad del método- y se analiza de un modo detallado -en forma de organigramas y listados comentados- las distintas rutinas en lenguaje FORTRAN de este programa. Asimismo, y respetando el carácter elemental de la exposición, se abren algunas posibilidades de ampliación y nuevos desarrollos del método. Algunos ejercicios y ejemplos al final de cada capítulo se espera permitan clarificar los puntos más conflictivos del método. Finalmente se reúne en un apéndice, los distintos programas que se han mostrado en las sucesivas lecciones y que con objeto de que puedan ser procesados en microcomputadores se han traducido al lenguaje BASIC. Creémos y la experiencia del curso

así nos la ha confirmado, que el método de elementos finitos se debe enseñar y aprender mediante la praxis y presentar los sucesivos desarrollos del método de un modo motivado como solución a problemas numéricos e informáticos que aparecen en su desarrollo.

Si las lecciones que aquí se presentan permiten transmitir mejor estas ideas, los autores se sentirán mas que recompensados por el trabajo - que ha supuesto dar a luz a esta publicación.

Santander, Enero de 1984

Avelino Samartín Quiroga

Julián Díaz del Valle

I N D I C E

CURSO BASICO DE PROGRAMACION DEL METODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

	<u>Pág.</u>
CAPITULO 1.- <u>FUNDAMENTOS DEL METODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS</u>	
1.1.- Introducción.....	1
1.2.- Problemas de contorno.....	3
1.3.- Ejemplo de problema de contorno.....	7
1.4.- El método de los elementos finitos.....	14
1.4.1.- Consideraciones generales.....	14
1.4.2.- Método de Galerkin.....	14
1.4.3.- Método de Ritz.....	17
1.4.4.- Técnica de los elementos finitos.....	19
1.4.5.- Ejemplo ilustrativo.....	23
1.5.- Generalización a problemas de orden superior.....	38
1.5.1.- Problemas de contorno.....	38
1.5.2.- Aplicación del MEF.....	44
1.5.3.- Ejemplo ilustrativo.....	51
-Ejercicios propuestos.....	57
 CAPITULO 2.- <u>ORGANIZACION GENERAL DE UN PROGRAMA DE ELEMENTOS FINITOS</u>	
2.1.- Introducción.....	59
2.2.- Descripción del problema modelo. Elasticidad bidimensional.....	60
2.3.- Aplicación del MEF.....	64
2.4.- Organigrama general de un programa de EF.....	68
2.5.- Descripción y organización de las variables utilizadas en el programa.....	72
-Ejercicios propuestos.....	79

CAPITULO 3.- DESCRIPCION DEL PROGRAMA PRINCIPAL

3.1.- Dimensionamiento de las variables.....	81
3.2.- Programa principal.....	86
-Ejercicios propuestos.....	89

CAPITULO 4.- ENTRADA DE DATOS (INPUT)

4.1.- Organización de la entrada de datos.....	90
4.2.- Ejemplo ilustrativo.....	91
4.3.- Recomendaciones de programación.....	93
4.4.- Posibles extensiones.....	97
-Ejercicios propuestos.....	102

CAPITULO 5.- FORMACION DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ DE LA ESTRUCTURA

5.1.- Subrutina general (ENSAM).....	104
5.2.- Cálculo de la matriz de rigidez elemental (RIGID)	107
5.2.1.- Elemento triangular CT.....	107
5.2.2.- Posibles extensiones.....	114
5.3.- Ensamblaje de matrices elementales (ELENs).....	123
5.4.- Introducción de las condiciones de borde.....	131
5.4.1.- Planteamiento teórico (BORDE).....	131
5.4.2.- Programación.....	134
5.4.3.- Posibles desarrollos.....	137
-Ejercicios propuestos.....	143

CAPITULO 6.- RESOLUCION DE UN SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

6.1.- Introducción.....	146
6.2.- Solución de un sistema de ecuaciones por el método de Gauss.....	147

	<u>Pág.</u>
6.2.1.- Exposición teórica.....	147
6.2.2.- Rutina SOLV1. Matrices generales.....	151
6.2.3.- Rutina SOLVE. Matrices simétricas y en banda..	154
6.3.- Inversa de una matriz por el procedimiento de elimina- ción de Gauss (INVER).....	155
6.4.- Solución de un sistema de ecuaciones simétrico por el método de Choleski.....	161
6.5.- Inversa de una matriz triangular por el método de Cho- leski (INCHO).....	168
6.6.- Solución de sistemas de ecuaciones lineales por méto- dos iterativos.....	170
6.7.- Otros métodos directos.....	179
6.7.1.- Introducción.....	179
6.7.2.- Partición en dos subestructuras evolutivas...	179
6.7.3.- Técnica de las subestructuras evolutivas.....	183
6.7.4.- Método frontal.....	183
-Ejercicios propuestos.....	185

CAPITULO 7.- RESULTADOS

7.1.- Introducción al cálculo de resultados.....	186
7.2.- Puntos de cálculo óptimo de los resultados.....	189
7.3.- Subrutinas para el cálculo de resultados.....	193
7.4.- Subrutina de salida de resultados.....	198
-Ejercicios propuestos.....	

APENDICE A.- PROGRAMA EN LENGUAJE BASIC

A.1.- Introducción.....	202
A.2.- Listado del programa en lenguaje BASIC.....	203

	<u>Pág.</u>
A.3.- Especificaciones sobre la entrada de datos y salida de resultados.....	213
A.4.- Ejemplo de prueba.....	215
 BIBLIOGRAFIA	 218

CAPITULO 1.- FUNDAMENTOS DEL METODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

1.1.- INTRODUCCION

El comportamiento de numerosos fenómenos físicos, y en particular, los que son objeto de aplicación a la Ingeniería, pueden ser simulados mediante el estudio de un problema específico de contorno y condiciones iniciales. Se comprende que el desarrollo de procedimientos de resolución de estos tipos de problemas, de nominados de campo físico, constituye una actividad de gran importancia por sus aplicaciones.

El método de los elementos finitos representa una de las técnicas más poderosas y relativamente recientes, de discretización y, eventualmente, de resolución de los problemas de campo. El éxito del método reside en su facilidad de automatización y generalidad, características ideales para su implementación en un programa de cálculo por computador. Existen numerosas variantes del método de los elementos finitos (MEF), pero sin duda alguna la más conocida y que será la única tratada aquí, corresponde a la formulación en movimientos o rigidez del MEF. La característica común de todas las formulaciones del MEF consiste en la utilización de funciones definidas, no globalmente en todo el dominio del problema de campo, y sí sólo en cada uno de los distintos subdominios o elementos en los que se divide el dominio global. La utilización de este tipo de funciones locales presenta un conjunto de ventajas extraordinarias entre las que se pueden citar:

- (a) Generación automática de funciones coordenadas generalizadas, satisfaciendo condiciones esenciales de borde del problema de campo.

(b) Obtención ordenada de un sistema algebraico equivalente al problema de cam
po, con un número pequeño de coeficientes no nulos que se calculan de un mo
do repetitivo según un único algoritmo. De este modo las necesidades de al
macenamiento en computador son limitadas (disposición en banda) y la econo
mía de programación es importante.

Desde sus inicios, el MEF ha recibido numerosas aportaciones que le han per
mitido alcanzar en la actualidad un desarrollo extraordinario: Construcción de familias
de elementos, integración numérica, elementos isoparamétricos, subestructura-
ción, generación automática y optimización de mallas, minimización de ancho de
banda, elaboración de los resultados del cálculo, etc. En los apartados siguien
tes y dentro del carácter introductorio de este texto, se describen los aspec
tos más fundamentales del MEF, sin comentar las distintas e importantes aporta
ciones técnicas, que aparecen en cualquier programa de computador comercial y
moderno, basado en el método. Dentro de esta idea, sólo se trataran aquí pro
blemas estáticos o estacionarios, suficientes para conocer los aspectos bási
cos del MEF y que por otra parte, permite, con un mínimo de esfuerzo, su exten
sión a los problemas dinámicos o transitorios.

Con objeto de evitar complicaciones numéricas innecesarias, la mayoría
de los ejemplos que en este capítulo se presentan, se refieren a un dominio -
monodimensional (1-D) para los que evidentemente la aplicación del MEF no es
eficiente, ya que en general existen soluciones analíticas "exactas". Eviden-
temente, la aplicación del MEF adquiere toda su intensidad e importancia en
el tratamiento de problemas 2-D y 3-D, pero ello exige la utilización del com
putador y un esfuerzo de preparación de datos e interpretación de los resulta
dos que pueden oscurecer las ideas fundamentales del método que se exponen en
este capítulo.

1.2.- PROBLEMAS DE CONTORNO

Un problema de contorno consiste en la determinación de una función $\underline{u} = \underline{u}(\underline{x}) \in \mathbb{R}^m$ del punto $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ (aplicación de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^m) sometida a las condiciones siguientes:

$$\begin{aligned} \underline{L} \underline{u} &= \underline{f} & \text{para } \underline{x} \in A \\ \underline{B} \underline{u} &= \underline{0} & \text{para } \underline{x} \in \bar{A} \end{aligned} \quad [1.1]$$

siendo

$\underline{f} = \underline{f}(\underline{x}) \in \mathbb{R}^m$ una función conocida del punto \underline{x} .

\underline{L} un operador diferencial de orden $2k$ de dimensión $(m \times m)$.

\underline{B} un operador diferencial de orden máximo $2k-1$ y dimensión $k \times m$.

A y \bar{A} designan el dominio y la frontera del mismo respectivamente.

En este dominio se define la variable de campo \underline{u} .

El problema (1.1) representa, si está bien puesto, una situación física real. Para ello es preciso que los operadores \underline{L} y \underline{B} satisfagan ciertas condiciones, que se comentan a continuación. Con este fin es preciso introducir, - con el mínimo de complicación matemática, algunos conceptos fundamentales de la teoría de análisis funcional.

Una función \underline{u} es admisible si satisface las condiciones de contorno, siendo además necesario que la aplicación del operador \underline{L} tenga sentido, es decir,

NOTA(*): Se denota con un trazo inferior el carácter no escalar de una variable.

que la función sea derivable hasta el orden $2k$. (*)

En el espacio de las funciones admisibles, se puede definir el producto escalar siguiente:

$$\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle \equiv \int_A \underline{u}^T \underline{v} \, dA = \int_A \underline{v}^T \underline{u} \, dA$$

Se dice que un operador \underline{L} es simétrico o autoadjunto si se satisface para toda pareja $\underline{u}, \underline{v}$ de funciones admisibles, la siguiente igualdad:

$$\langle \underline{L} \underline{u}, \underline{v} \rangle = \langle \underline{L} \underline{v}, \underline{u} \rangle$$

La propiedad de operador lineal se expresa mediante la condición:

$$\underline{L}(\alpha \underline{u} + \beta \underline{v}) = \alpha \underline{L}(\underline{u}) + \beta \underline{L}(\underline{v})$$

con α y β dos escalares y \underline{u} y \underline{v} , dos funciones admisibles.

El operador \underline{L} es positivo definido si se satisface para toda función admisible distinta de la función nula, la siguiente desigualdad:

$$\langle \underline{L} \underline{u}, \underline{u} \rangle \geq \lambda^2 \|\underline{u}\|^2 > 0$$

con $\|\underline{u}\| = \langle \underline{u}, \underline{u} \rangle^{\frac{1}{2}}$ la norma asociada al producto escalar.

NOTA(*): La existencia de la derivada de orden $2k$ implica que es suficientemente suave (su cuadrado es Lebesgue-integrable).

La función admisible que satisface la ecuación primera de (1.1) se denomina solución clásica del problema de contorno. Existen muchos problemas de contorno para los que no existen soluciones clásicas y para los cuales es posible encontrar una solución \underline{u} que satisfaga (1.1) en "casi" todos los puntos del dominio A . Esta solución débil se define como la función $\underline{u}(\underline{x})$ para la que las ecuaciones (1.1) se satisfacen en el sentido de la media ponderada, es decir, para cualquier función $\underline{v}(\underline{x})$ de una clase conveniente de funciones (funciones de prueba o peso) se cumple:

$$\int_A \underline{v}^T \cdot \underline{L} \underline{u} \, dA = \int_A \underline{v}^T \underline{f} \, dA$$

$$\underline{B} \underline{u} = 0 \quad [1.2]$$

Esta solución débil $\underline{u}(\underline{x})$ puede ser interpretada en la simulación de fenómenos físicos como aparentemente correcta, puesto que las medidas que en los modelos físicos se pueden llevar a cabo, nunca son puntuales, y se efectúan siempre sobre una región -usualmente pequeña- del dominio y se refieren a un punto representativo del mismo.

En apartados posteriores de este capítulo, se refinarán estos conceptos. Ahora y con objeto de simplificar la exposición se considera en lo que sigue únicamente problema de contorno de grado 1 ($k = 1$) y con una función de campo $\underline{u}(\underline{x})$ escalar ($m = 1$).

En el caso de un problema de contorno, con un operador lineal, definido positivo y simétrico es posible modificar la expresión (1.2) de modo que se rebajen los requerimientos de derivabilidad de la solución débil. En efecto, basta integrar por partes -aplicando la fórmula de Green- a dichas ecuaciones

(1.2). Se puede demostrar que esta integración conduce a una expresión del tipo:

$$\int_A \underline{L}^*(\underline{v}) \underline{L}^*(\underline{u}) dA + \int_A \underline{v} \underline{B}^*(\underline{u}) d\bar{A} = \int_A \underline{v} \cdot \underline{f} dA \quad [1.3]$$

en donde \underline{L}^* es un operador diferencial de orden $\kappa=1$.

\underline{B}^* es un operador diferencial de orden máximo igual a $2\kappa-1=1$

Un caso particular interesante corresponde a la situación de condiciones de contorno de uno de los dos tipos siguientes:

$$\underline{u} - \underline{u}_0 = 0 \quad [1.4 a]$$

$$\underline{B}^*(\underline{u}) - \underline{\sigma}_0 = 0 \quad [1.4 b]$$

siendo \underline{u}_0 y $\underline{\sigma}_0$ valores especificados en el punto $\underline{x} \in \bar{A}$ del contorno.

Las condiciones de contorno (1.4a) y (1.4b) son excluyentes entre sí en cada punto del contorno. A las primeras se las denomina esenciales y en los problemas estructurales corresponden a movimientos especificados. Las condiciones (1.4b) se conocen como condiciones naturales y en el cálculo de estructuras representan fuerzas generalizadas aplicadas en el contorno. Por lo tanto el contorno \bar{A} se puede dividir en dos partes disjuntas \bar{A}_1 y \bar{A}'_1 , correspondientes a los conjuntos de puntos para los que se plantean condiciones esenciales y naturales respectivamente.

Si en este caso particular que se analiza se eligen las funciones de pruebas, ya no arbitrarias como en (1.2) sino que posean derivada primera admi-

ble y satisfagan las condiciones esenciales homogéneas del problema (es decir, se anule \underline{v} en los puntos $x \in \bar{A}_1$), la ecuación (1.3) se puede reescribir como sigue:

$$\rightarrow \int_A \underline{L}^*(\underline{v}) \underline{L}^*(\underline{u}) dA + \int_{A_1} \underline{v} \underline{\sigma}_0 dA = \int_A \underline{v} \underline{f} dA \quad [1.5]$$

y la solución \underline{u} satisface además las condiciones esenciales (1.4a) en el contorno \bar{A}_1 .

Conviene observar la diferencia de exigencia entre la solución \underline{u} de la ecuación variacional (1.2) frente a la de la ecuación (1.5). En efecto, en esta última sólo se precisa que \underline{u} sea derivable hasta el orden $k=1$, frente a la expresión (1.2) en donde aparecen términos de derivación hasta $2k=2$. Esta importante reducción en las condiciones de suavizado de la solución se ha conseguido a costa de introducir mayores exigencias de derivabilidad en las funciones de prueba \underline{v} .

1.3. EJEMPLO DE PROBLEMA DE CONTORNO

A continuación se presentan algunos problemas físicos de contorno que se rigen por una ecuación monodimensional con una única función de campo (escalar) y de orden $k=1$.

Una situación general corresponde al siguiente problema:

$$a_0 \frac{d^2 u}{dx^2} + a_1 \frac{du}{dx} + a_2 u = f \quad x \in A \quad (0, l) \quad [1.6a]$$

con a_0 , a_1 , a_2 y f funciones de la variable x .

Las condiciones de contorno se especifican en los bordes, $x=0$ y $x=l$, del dominio A . Una condición en cada uno de ellos, que incluye únicamente u y $\frac{du}{dx}$, y cuya expresión más general es:

$$\alpha_0 \frac{du}{dx} + \beta_0 u \Big|_{x=0} = \gamma_0 \quad [1.6 b]$$

$$\alpha_l \frac{du}{dx} + \beta_l u \Big|_{x=l} = \gamma_l$$

El operador definido por la expresión (1.6a) es lineal y las condiciones de contorno (1.6b) conservan este carácter lineal del problema de contorno.

El problema es positivo definido cuando el coeficiente $a_0 = a_0(x)$ no cambia de signo ni se anula en el dominio, es decir, se satisface la condición:

$$|a_0(x)| > \gamma > 0 \quad \text{para todo } x \in (0, l)$$

En la simulación del comportamiento de problemas físicos conservativos lineales se obtiene un problema de contorno positivo definido lineal y simétrico. Por ello las condiciones de contorno como se ha indicado, no pueden ser arbitrarias. El planteamiento clásico conduce a la siguiente expresión:

$$-\frac{d}{dx} \left[k(x) \frac{du}{dx} \right] + b(x) u = f(x) \quad [1.7] \quad \text{para } x \in (0, l)$$

con las condiciones de borde esencial o natural en cada extremo del contorno:

$$\begin{aligned} \text{Esenciales: } u(x) &= u_0 & \text{para } x=0 \\ u(x) &= u_l & \text{para } x=l \end{aligned} \quad [1.8 a]$$

$$\text{Naturales} : k(x) \frac{du}{dx} = \nabla_0 \quad \text{para } x=0 \quad [1.8b]$$

$$-k(x) \frac{du}{dx} = \nabla_\ell \quad \text{para } x=\ell$$

En algunos problemas físicos existen condiciones de borde, que representan una combinación lineal de las esenciales y naturales del extremo, es decir, ecuaciones del tipo mixto:

$$\begin{aligned} k(x) \frac{du}{dx} - p_0 u &= p_0 u_0 & \text{para } x=0 \\ -k(x) \frac{du}{dx} - p_\ell u &= -p_\ell u_\ell & \text{para } x=\ell \end{aligned} \quad [1.8c]$$

En este caso el problema sigue estando bien planteado.

La ecuación (1.7) y una condición de contorno (1.8) en cada uno de los dos bordes, $x=0$ y $x=\ell$, permiten describir fenómenos físicos muy diversos. La tabla 1.1 muestra algunos de éstos fenómenos. En todos ellos, se elige una variable -función incógnita básica u , que se denomina variable de estado. La magnitud dual de u , dentro del marco de un principio o ley física de conservación se designa de un modo genérico como fuente f . El carácter conservativo del principio asegura la propiedad ^{positiva} definida y simétrica del problema de contorno.

Existen dos magnitudes derivadas de las anteriores, que corresponden a partir de f al flujo ∇ y al gradiente $\varepsilon = \frac{du}{dx}$, que se obtiene de la variable de estado. Estas cantidades se relacionan entre sí mediante una ecuación constitutiva que contiene toda la información del material que experimenta el fenómeno físico. Esta ecuación constitutiva es en general compleja y dependiente del tipo particular de material, por lo que se suele sustituir en una primera aproximación por otra más simple, lineal, es decir, la expresión:

PROBLEMA FISICO (monodimensional)	PRINCIPIO	VARIABLE ESTADO (μ)	FLUJO (σ)	MODULO MATERIAL (k)	FUENTE (f)	ECUACION CONSTITUTIVA $\sigma = f(\epsilon)$
BARRA ELASTICA	EQUILIBRIO FUERZAS (Conservación de la energía)	MOVIMIENTO	TENSION	MODULO DE YOUNG	FUERZAS MASICAS	HOKE
CONDUCCION DE CALOR	CONSERVACION DE LA ENERGIA	TEMPERATURA	FLUJO CALOR	CONDUCTIVIDAD TERMICA	FUENTE TERMICA	FOURIER
FLUJO DE FLUIDOS	CONSERVACION CANTIDAD DE MOVIMIENTO	VELOCIDAD	TENSION DE CORTE	VISCOSIDAD	FUERZAS MASICAS	STOKES
ELECTROSTATICA	CONSERVACION DEL FLUJO ELECTRICO	POTENCIAL ELECTRICO	FLUJO ELECTRICO	CONSTANTE ELECTRICA	CARGA	COULOMB
FLUJO A TRAVES MEDIO POROSO	CONSERVACION DE LA MASA	ALTURA DE PRESION HIDRAULICA	VELOCIDAD FLUJO	PERMEABILIDAD	FUENTE DE FLUIDO	DARCY

TABLA 1.1.- PROBLEMAS DE CONTORNO MONODIMENSIONALES

$$\sigma = -k(x) u' \quad [1.9]$$

La constante $k(x)$ característica del material se la suele denominar módulo del material.

La ecuación (1.9) implica la linealidad del problema de contorno que describe el fenómeno físico.

Como se ha indicado se puede obtener una formulación variacional del problema de contorno definido por la ecuación (1.7) y dos pertinentes condiciones de contorno (1.8). Esta formulación variacional permite calcular la solución débil del problema. En el caso particular de condiciones esenciales en los dos extremos del intervalo $(0,1)$ se deduce la ecuación variacional:

$$\int_0^1 (k u' v' + b u v) dx = \int_0^1 f v dx \quad [1.10]$$

con $u(0) = u_0$ y $u(1) = u_1$

Las funciones arbitrarias son admisibles, es decir, poseen su derivada primera suficientemente suave y satisfacen las condiciones esenciales homogéneas del problema ($v(0) = v(1) = 0$). Si las condiciones de contorno (1.8) del problema fueran otras distintas de las esenciales, la expresión (1.10) se vería modificada de acuerdo con los resultados expresados en la fórmula (1.5).

En los problemas físicos conservativos existe una formulación funcional alternativa a la variacional, expresada por la ecuación (1.10) para el caso particular de condiciones esenciales en el contorno (problema de Dirichlet).

En efecto, la solución débil del problema de contorno es la función μ que minimiza la funcional $J(v)$ siguiente:

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_0^l (k v'^2 + b v^2 - 2 f v) dx \quad [1.11]$$

supuesto que $\mu(0) = \mu_0$ y $\mu(l) = \mu_l$, y μ tiene derivada primera suficientemente suave. La demostración de la anterior igualdad exige procedimientos del cálculo de variaciones. El hecho de que μ minimice $J(v)$, supone que para cualquier función w -que satisfaga las condiciones de admisibilidad- cercana a μ , cumple la desigualdad:

$$J(\mu) \leq J(w) \quad [1.12]$$

Si w se expresa en la forma

$$w = \mu + \eta v$$

con v una función arbitraria que no modifica las condiciones de admisibilidad de w , es decir, posee derivada primera y satisface las condiciones

$$v(0) = v(l) = 0$$

η es un número arbitrariamente pequeño.

Expresando que la diferencia:

$$\delta J = J(w) - J(\mu) = J(\mu + \eta v) - J(\mu) \geq 0 \quad [1.13]$$

es siempre positiva, independiente del signo de la constante arbitrariamente pequeña η , se deduce mediante desarrollo en serie de potencias de η , la igualdad (1.12), *supuesto que satisface la condición (1.12)*

La extensión del resultado anterior a otros casos de condiciones de contorno o bien a problemas con un número de dimensiones, funciones y orden de derivación k , sigue análogas consideraciones.

En general se puede afirmar, que la solución débil de un problema lineal, positivo definido y simétrico obtenida mediante una formulación variacional coincide con la que se deduce de un proceso de minimización de una funcional.

Desde un punto de vista mecánico, el principio de los trabajos virtuales corresponde a una formulación variacional y el de mínimo de la energía potencial total constituye un planteamiento funcional.

Conviene observar, sin embargo, que en muchos problemas físicos, no conservativos, no existe un funcional cuyo mínimo conduzca a la solución débil. Incluso en estos casos es posible un planteamiento variacional para la búsqueda de soluciones débiles.

Existen sendas técnicas numéricas para la obtención de soluciones débiles según las formulaciones variacionales (1.10) y funcionales ^{o energética} (1.11), que corresponden a los métodos de Galerkin y de Ritz respectivamente. El método de los elementos finitos constituye en cada una de las citadas técnicas un

caso particular de enorme interés que se expone en el siguiente apartado.

1.4.- EL METODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

1.4.1.- CONSIDERACIONES GENERALES

Primeramente se describen en este apartado los métodos de Galerkin y Ritz, concretándose, para alcanzar una mayor claridad en la exposición, a los problemas (1.10) y (1.11). A continuación se muestran las funciones básicas características del MEF y las etapas precisas de la aplicación a un caso real. Finalmente se comentan en detalle algunos ejemplos simples que intentan aclarar la sistematización del MEF.

1.4.2.- METODO DE GALERKIN

La solución de la ecuación variacional (1.10) puede conseguirse mediante la siguiente aproximación conocida como método de Galerkin.

Se supone que la solución puede expresarse como sigue:

$$u(x) \approx u^N(x) = \sum_{n=1}^N q_n \varphi_n(x) + \varphi_0(x) \quad [1.14]$$

en donde $\varphi_n(x)$ son funciones conocidas especificadas que cumplen una serie de condiciones que se comentan más adelante y que se denominan funciones básicas o coordenadas generalizadas.

q_n son coeficientes^{*} en principio no conocidos y que se designan como valores coordenadas.

Las funciones $\varphi_n(x)$ ($n=1,2,\dots$) deben de satisfacer los requisitos siguientes:

- (a) Ser linealmente independientes.
- (b) Ser admisibles, es decir, susceptibles de ser introducidos en el integrando (1.10) y cumplir las condiciones homogéneas esenciales (nulas) de contorno. En el caso del problema (1.10) sus derivadas primeras deben ser suficientemente suaves.
- (c) Constituir un sistema completo de funciones, es decir, cualquier función admisible f puede expresarse en serie generalizada de Fourier de φ_n de modo que la distancia entre f y la función suma de la serie tienda a cero. En formulación matemática existen unos coeficientes q'_n tales que, se cumple:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{n=1}^N q'_n \varphi_n \right\| \rightarrow 0$$

para toda f admisible (*).

La función φ_0 debe satisfacer las condiciones de contorno y con derivada primera suave.

NOTA(*): Por ejemplo si la serie φ_n está constituida por funciones pares en el intervalo $(0,l)$ no sería posible expresar una función impar en serie generalizada de Fourier de las funciones φ_n .

Se considera asimismo, que la función de prueba se puede expresar como sigue:

$$v(x) \simeq v^N(x) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n^* \varphi_n(x) \quad [1.15]$$

Si se introducen las igualdades (1.15) y (1.16) en la ecuación variacional (1.10):

$$\int_0^l (k u'v + b uv) dx = \int_0^l f v dx$$

se deduce el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\left(\sum_{j=1}^N K_{ij} q_j - F_i \right) q_i^* = 0 \quad i = 1, 2, \dots, N$$

siendo

$$\begin{aligned} K_{ij} &= \int_0^l (k \phi_i' \cdot \phi_j' + b \phi_i \cdot \phi_j) dx \\ F_i &= \int_0^l f \phi_i \cdot dx + \int_0^l (k \phi_0' \phi_i' + b \phi_0 \phi_i) dx \end{aligned} \quad [1.16]$$

Dado el carácter arbitrario de la función de prueba v , los coeficientes q_i^* son asimismo arbitrarios, resultando el siguiente sistema de ecuaciones lineales, que permiten obtener un conjunto de coeficientes q_i y por lo tanto u^N y una aproximación de la solución u :

$$\sum_{j=1}^N K_{ij} q_j = F_i \quad [1.17]$$

La matriz de coeficientes de este sistema es simétrica y positiva definida en concordancia con las características del problema continuo de contorno.

Se comprende que el método de Galerkin es muy potente en la resolución de problemas de contorno, siempre que exista un procedimiento sistemático de obtención de las funciones básicas ϕ_i . El MEF permite generar automáticamente estas funciones básicas, como se verá más adelante.

1.4.3.- METODO DE RITZ

El procedimiento de Ritz sigue líneas paralelas a las que se acaban de comentar. Se supone que la función u que minimiza la funcional (1.11):

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_0^l (k v^2 + b v^2 - 2 f v) dx$$

y satisface las condiciones de borde $u(0) = u_0$, $u(l) = u_l$ puede expresarse mediante la serie (1.14), es decir:

$$u(x) \approx u(x) = \sum_{n=1}^N q_n \varphi_n(x) + \varphi_0(x)$$

Sustituyendo la expresión aproximada de la solución en la funcional se obtiene la siguiente forma cuadrática:

$$J(u^N) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N K_{ij} q_i q_j - \sum_{i=1}^N F_i q_i + H_0$$

siendo

$$\text{siendo } H_0 = \frac{1}{2} \int_0^l (\varphi_0' \varphi_0 + \varphi_0 \varphi_0 - 2 f \varphi_0) dx$$

$$\rightarrow K_{ij}, F_i: \text{ dados por [1.16]}$$

El valor mínimo de la funcional entre todas las funciones obtenidas del desarrollo (1.14) se alcanza para los valores de los parámetros coordinados - deducidos del siguiente sistema:

$$\frac{\partial J(\mu^N)}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

es decir, el sistema de ecuaciones lineales (1.17):

$$\sum_{i=1}^N K_{ij} q_j - F_j = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

Se denomina $q_i = q_i^N$ a la solución del sistema anterior y J^N al valor mínimo correspondiente de la funcional, es decir, a la expresión:

$$J^N = \frac{1}{2} \sum F_i q_i^N + H_0 \quad [1.18]$$

Se puede demostrar que se cumple las siguientes desigualdades:

$$J^1 \geq J^2 \geq J^3 \geq \dots \geq J^N \geq \dots \geq J(\mu)$$

siendo $J(\mu)$ el mínimo del problema funcional (1.11).

Si se considera el carácter completo del espacio de funciones $\varphi_n(x)$, se concluye que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} J^N = J(\mu)$$

es decir, la solución de Ritz converge a la solución exacta según una medida de la energía o funcional $J(\mu)$

1.4.4.- TECNICA DE LOS ELEMENTOS FINITOS

El método de los elementos finitos se aplica en su formulación típica ya a la ecuación (1.10) o a la (1.11). Su característica fundamental reside en la selección de las funciones base o coordenadas. Para ello, se divide el dominio en una partición de elementos. Así, elementos contiguos en un dominio 1-D, tienen un punto común o nudo. En el caso de dominios 2-D, los elementos, generalmente triangulares o cuadriláteros, presentan lados o aristas comunes así como nudos. Por último, en problemas 3-D, la partición del dominio puede ser más variada; tetraedros, prismoides o ladrillos, etc. En este caso elementos adyacentes comparten caras, aristas y nudos comunes (figura 1.1).

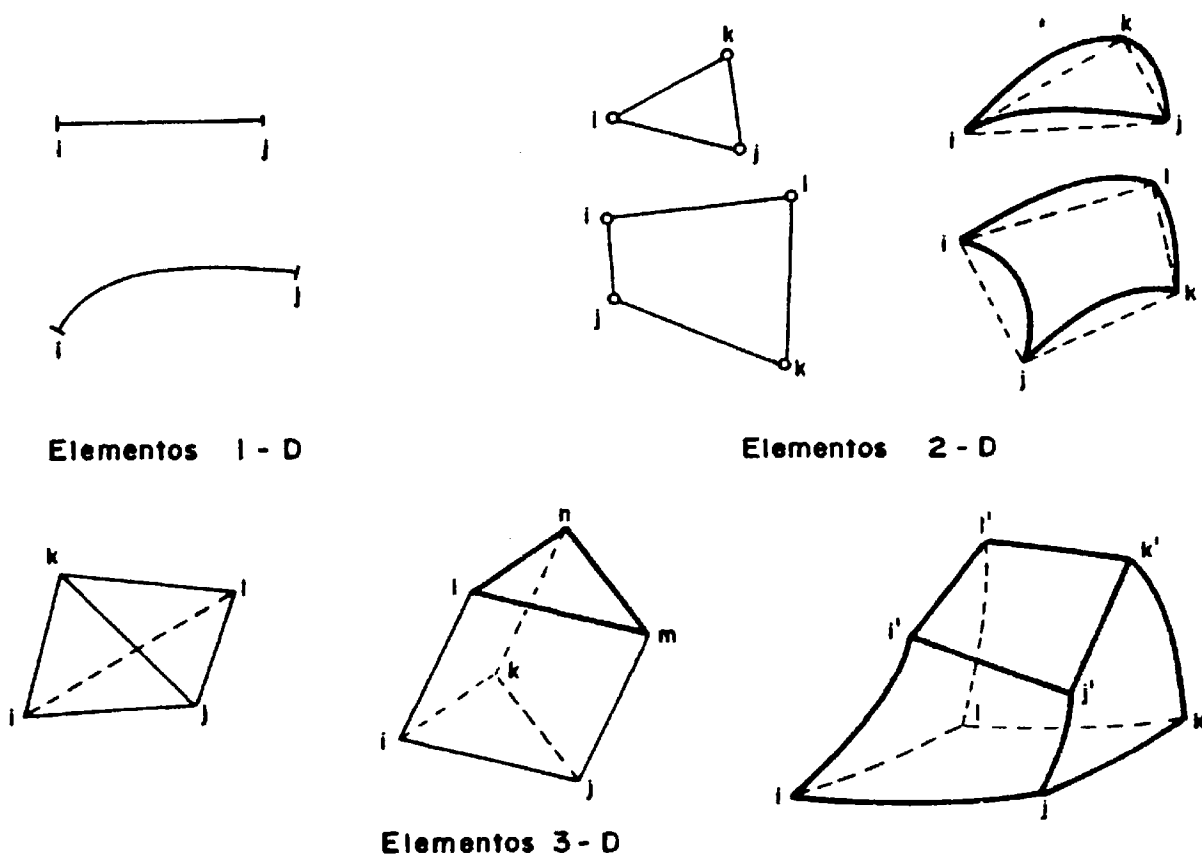


FIG.1.1.- TIPOS DE ELEMENTOS FINITOS

Para cada uno de los nudos n del dominio se define una función básica ϕ_n con valores no nulos únicamente en el subdominio constituido por todos los elementos que tienen ese nudo común. Esta función básica adopta un valor unidad en el nudo n considerado y nulo en los restantes nudos del subdominio. Se supone variación lineal de la función ϕ entre valores de los nudos, de esta forma se asegura la continuidad C^0 , es decir, la existencia de una primera derivada suficientemente suave (formada por tramos constantes con saltos de discontinuidad).

Se puede mostrar que el conjunto de funciones ϕ_n satisface las condiciones exigidas en los desarrollos de Galerkin y Ritz. En efecto, si N es el número total de puntos se puede escribir la aproximación:

$$\mu(\underline{x}) = \sum_{n=1}^N q_n \phi_n(\underline{x}) = \sum_{n=1}^N \mu_n \phi_n(\underline{x}) \quad [1.19]$$

en donde ahora el parámetro coordinado q_n tiene el significado físico de constituir el valor de μ en el nudo n correspondiente a la función ϕ_n , es decir:

$$q_n = \mu_n = \mu(\underline{x}_n)$$

con \underline{x}_n coordenadas del nudo n .

Las funciones $\phi_n(\underline{x})$ son linealmente independientes por construcción, admisibles y constituyen bajo ciertas condiciones un sistema completo (*). Este último aspecto exige comentar el concepto de malla de elementos finitos refinadas. Se observa que para cada partición del dominio A compuesto de elementos

NOTA(*): Estas condiciones corresponden a los denominados criterios de deformación nulo y constante. Ver por ejemplo a este respecto Strang and Fix (1973).

finitos y N nudos, existe una serie de N funciones básicas $\phi_n^N (n=1,2,\dots,N)$. Si se introducen nudos extras en la partición anterior, se puede generar una nueva partición de A de modo que cada uno de los k elementos anteriores se descomponga ahora en varios más pequeños. Se dice, en este caso que la nueva partición o malla de elementos finitos es más refinada que la anterior. Por lo tanto, las funciones básicas correspondientes a una malla de elementos finitos están contenidos (en el sentido de que pueden ser deducidos por simple combinación lineal) en la serie de funciones básicas de cualquier malla más refinada.

Tras los comentarios anteriores, se comprende que todas las propiedades previamente expuestas para las funciones globales básicas son aplicables ahora, a las funciones generales mediante elementos finitos, simplemente considerando que el crecimiento de N (número de nudos y de funciones de la serie) se produce de acuerdo con las mallas cada vez mas refinadas.

Una vez definido los tipos de funciones básicas consideradas en el MEF, los pasos que se siguen ya en el procedimiento de Galerkin como en el Ritz son rutinarios. Sin embargo, la determinación de los coeficientes de K_{ij} y F_i mediante la fórmula (1.16) puede facilitarse de un modo considerable si se considera específicamente el carácter local de las funciones básicas usadas en el MEF.

A continuación se resumen los aspectos específicos del MEF en la determinación de los coeficientes K_{ij} y F_i las fórmulas (1.16) y posterior resolución del sistema (1.17):

(a) Introducción del concepto de función de forma en cada elemento.

- (b) Transformación en general isoparamétrica de cada elemento en uno tipo o "padre".
- (c) Evaluación numérica, según la fórmula de Gauss, de la contribución del dominio de cada elemento a las integrales de las fórmulas (1.16).
- (d) Ensamblaje de los distintos coeficientes (suma booleana) de las integrales anteriores.
- (e) Resolución del sistema de ecuaciones lineales (1.17) con unas características de la matriz de coeficientes positiva-definida, simétrica y en banda.
- (f) Determinación de los resultados en los puntos más adecuados de los elementos.

(g) - *Continuación de los resultados*

La técnica específica del MEF supone evaluar las integrales de las fórmulas (1.16) en suma de integrales referidas al dominio de cada elemento. Se determina, a continuación, la contribución de las funciones básicas a estas integrales extendidas a cada elemento, es decir, de las restricciones de las funciones básicas sobre cada elemento, denominadas funciones de forma o interpolación.

La integración en las fórmulas (1.16) se lleva a cabo numéricamente. Para ello es útil realizar una transformación geométrica (normalmente del tipo isoparamétrico) que convierte cada elemento en otro típico (elemento padre) con dimensiones unitarias. El procedimiento de integración de Gauss es utilizado

casi exclusivamente por sus indudables ventajas computacionales.

La suma de las contribuciones de cada integral a los valores de K_{ij} y F_i se efectúa por medio de sumas booleanas de matrices, lo que da origen a que la matriz de todos los coeficientes, K_{ij} , presenta un número elevado de elementos nulos y según se numeren los nudos de la malla, una estructura en banda. Esta característica, en conjunción con las generales de positiva definida, y simétrica de la matriz de coeficientes permiten elaborar técnicas específicas de resolución del sistema de ecuaciones 1.17.

Estas técnicas específicas del MEF adquieren una importancia excepcional en la elaboración de un programa general de computador, por lo que se comentan a continuación con cierto detalle dentro del contexto de un ejemplo concreto.

1.4.5.- EJEMPLO ILUSTRATIVO

Transmisión de calor a lo largo de una barra monodimensional.

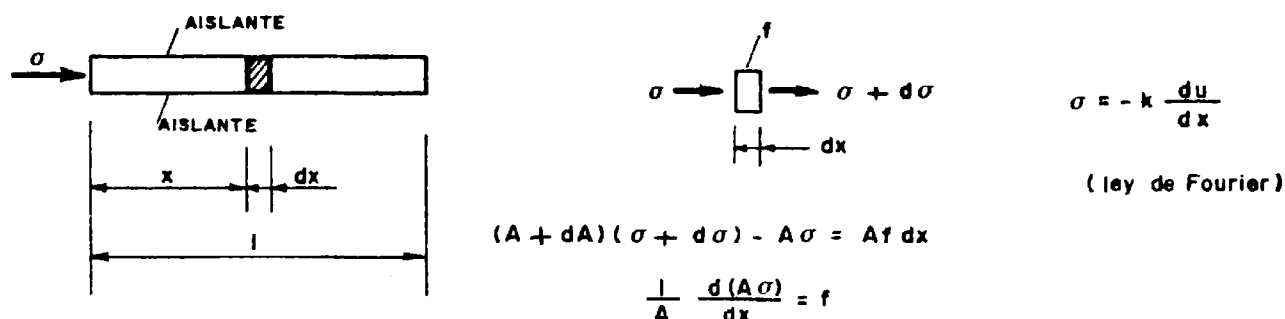


FIG. 1.2.- PLANTEAMIENTO DE LA ECUACION DE LA TRANSMISION DEL CALOR

En la figura 1.2 se indican las ecuaciones fundamentales que rigen el comportamiento de una barra sometida a la transmisión del calor. En ella f representa la fuente de calor para unidad de volumen (w/m^3), ∇ el flujo térmico por unidad de área (w/m^2). Se supone la barra de área A .

La ley de Fourier relaciona de un modo lineal el flujo térmico ∇ con el gradiente de la temperatura μ , en donde el signo negativo indica el hecho experimental de que la transmisión calorífica se dirige según la temperatura descendente.

La constante de proporcionalidad k se designa como conductividad específica y se mide en ($w/m^{\circ}K$) y la temperatura μ en grados Kelvin ($^{\circ}K$)

La ecuación que rige la transmisión calorífica a lo largo de la barra, según se desprende de la figura 1.2 es:

$$-\frac{1}{A} \frac{d}{dx} (AK \frac{d\mu}{dx}) = f \quad x \in (0, l) \quad [1.20]$$

Las condiciones de contorno pueden ser de los siguientes tipos:

(a) Esenciales. La temperatura es especificada en un extremo:

$$\mu = \bar{\mu}_0$$

(b) Naturales. El flujo de calor se conoce en un extremo

$$\nabla \bar{n} + \nabla_0 = 0$$

con \bar{n} la normal positiva (hacia el interior del contorno) resultando $\bar{n} = 1$ para

$x = 0$ y $\bar{n} = -1$ para $x = \ell$

A veces se plantean condiciones de contorno del tipo convención (combinación de esenciales y naturales), es decir, en un extremo se conoce la relación:

$$\sigma \bar{n} = h (\bar{u}_s - u)$$

con h coeficiente de convección y \bar{u}_s temperatura exterior conocida.

Se desea obtener la distribución de temperaturas en una barra en la que existe una fuente calorífica interior constante f y sometida a las condiciones en los bordes que se indica en la figura 1.3.

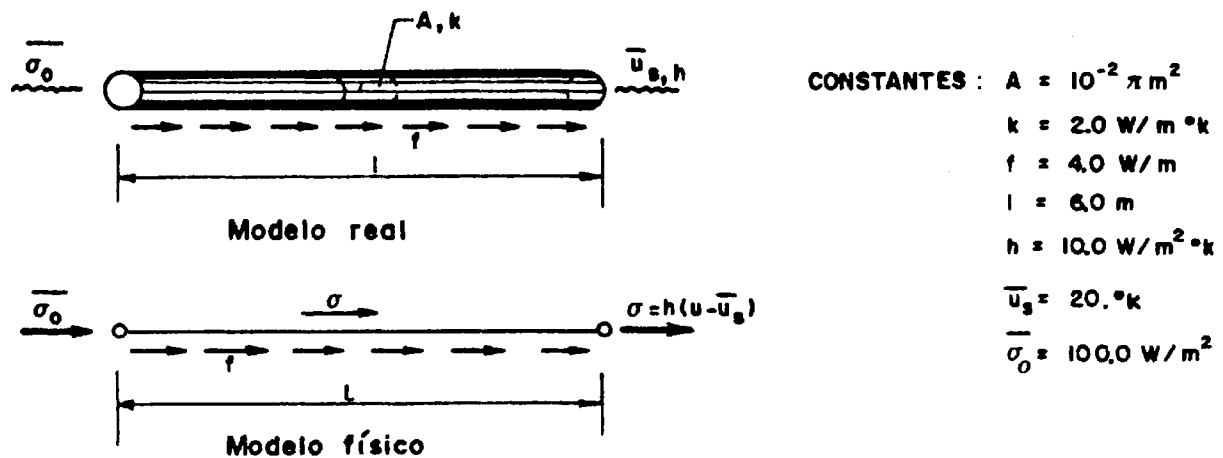


FIG.13.- PROBLEMA DE TRANSMISION CALORIFICA

El problema de contorno en este caso se escribe:

$$-k \frac{d^2 u}{dx^2} = f \quad x \in (0, \ell) \quad [1.21]$$

$$-k \frac{du}{dx} + \bar{\sigma}_0 = 0 \quad \text{para } x = 0$$

$$k \frac{du}{dx} = -h(u - u_s) \quad \text{para } x = \ell$$

La solución exacta (clásica) es:

$$u = -x^2 + 50x - 251.6 \text{ } ^\circ\text{C}$$

La solución aproximada mediante el método de los elementos finitos se obtiene a partir de la ecuación variacional o bien de la funcional que se desea minimizar. Se elige la primera posibilidad.

$$\int_0^l \left(k \frac{d^2 u}{dx^2} - f \right) v dx = 0$$

Integrando por partes resulta:

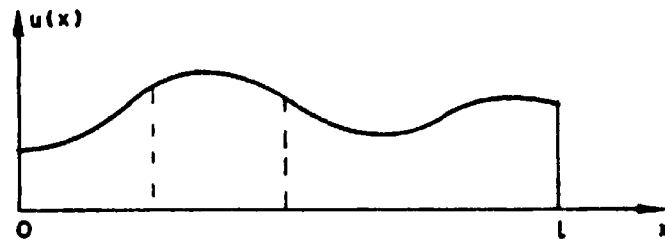
$$\int_0^l \left(k \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} - f v \right) dx - k \frac{du}{dx} v \Big|_0^l = 0 \quad [1.22]$$

es decir:

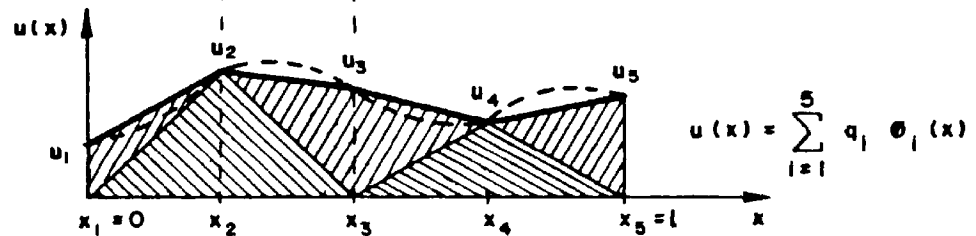
$$\int_0^l \left(k \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} - f v \right) dx + \sigma_0 v \Big|_0 + h(u - \bar{u}_s) v \Big|_l = 0 \quad [1.23]$$

La expresión (1.23) sirve de base para la aplicación del MEF. Para ello se divide el dominio $(0, l)$. En este ejemplo ilustrativo, y por simplicidad de computación, se consideran únicamente cuatro elementos iguales y cinco nudos (figura 1.4). ** longitud $l/4$*

Se adoptan como funciones básicas, las funciones "tejado" que se muestran en la figura 1.4. Todas ellas son continuas con derivada primera compuesta de tra



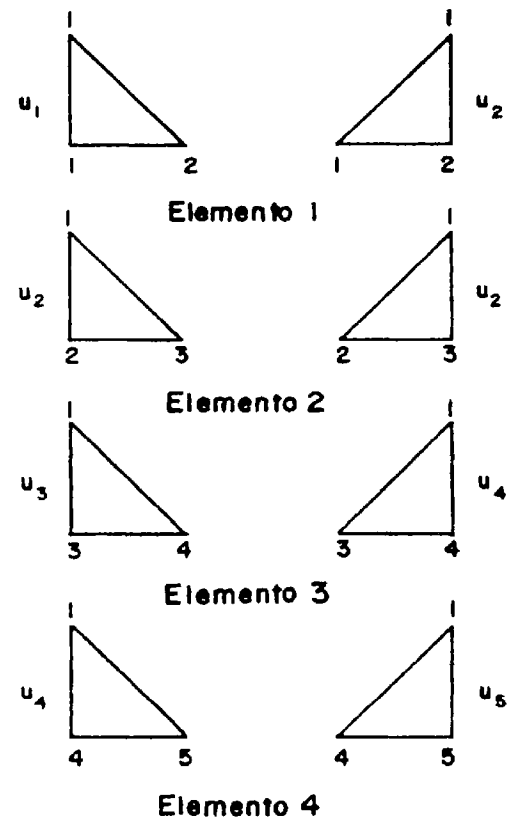
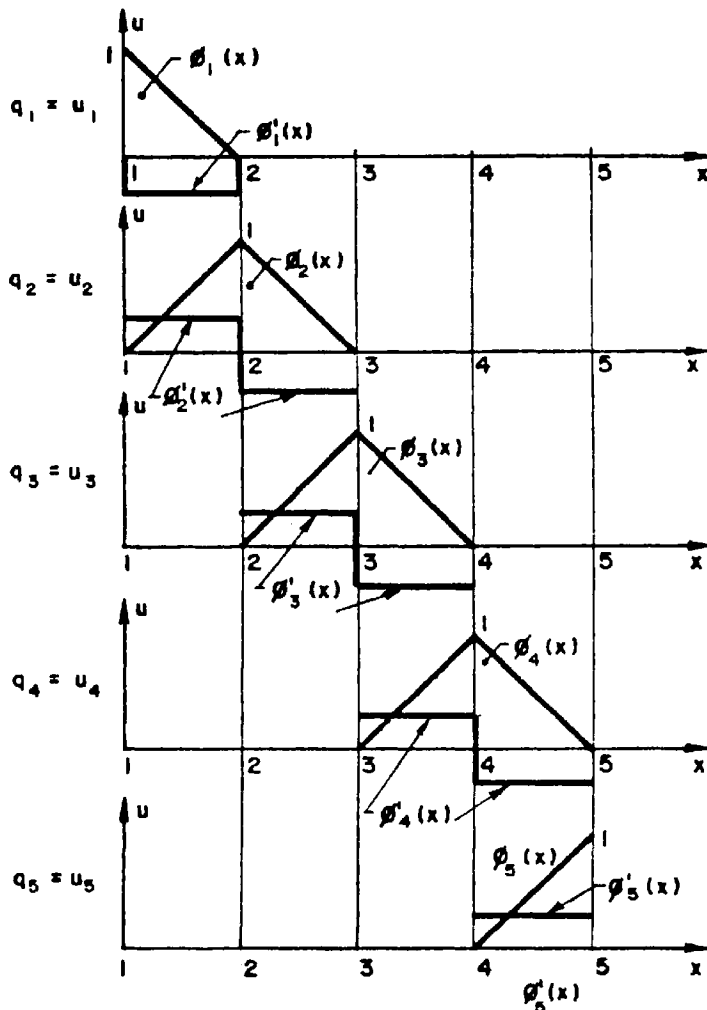
a) Solución exacta



b) Solución aproximada mediante elementos finitos

Nudos	Coordenadas	Elementos	Nudo 1	Nudo 2	Longitud
1	$x_1=0$	1	1	2	$x_2 - x_1 = l_1$
2	x_2	2	2	3	$x_3 - x_2 = l_2$
3	x_3	3	3	4	$x_4 - x_3 = l_3$
4	x_4	4	4	5	$x_5 - x_4 = l_4$
5	x_5				

c) Datos de definición de la malla de elementos finitos



d) Funciones básicas de los elementos finitos

mos rectos constantes con discontinuidad (salto finito) en el nudo característico de la función. El cuadrado de esta función derivada primera es integrable en el sentido de Lebesgue.

Por lo tanto, se pueden expresar la función de campo $\mu(x)$ (temperatura) en la siguiente forma:

$$\mu(x) = \sum_{i=1}^5 \mu_i \phi_i(x) = \underline{\phi} \underline{U} ; \quad v(x) = \sum_{i=1}^5 v_i \phi_i(x) = \underline{\phi} \underline{V}$$

con

$$\underline{\phi} = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_5] \quad \text{y} \quad \underline{U} = [\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_5]^T \quad \underline{V} = [v_1, v_2, \dots, v_5]^T$$

y la derivada primera de $\mu(x)$ y $v(x)$ es:

$$\frac{d\mu(x)}{dx} = \underline{\phi}_{,x} \underline{U} ; \quad \frac{dv(x)}{dx} = \underline{\phi}_{,x} \underline{V}$$

con

$$\underline{\phi}_{,x} = [\phi_{1,x} ; \phi_{2,x} ; \dots, \phi_{5,x}]$$

Las distintas integrales que aparecen en la fórmula (1.23) se evalúan fácilmente como sigue:

$$I_1 = \int_0^l \kappa \frac{d\mu}{dx} \frac{dv}{dx} dx = \int_0^l \left[\underline{V}^T \underline{\phi}_{,x}^T \kappa \underline{\phi}_{,x} \underline{U} \right] dx = \kappa \underline{V}^T \left[\int_0^l \underline{\phi}_{,x} \underline{\phi}_{,x} dx \right] \underline{U}$$

Teniendo en cuenta que:

$$\phi_{1,x} \phi_{3,x} = \phi_{1,x} \phi_{4,x} = \phi_{1,x} \phi_{5,x} = \phi_{2,x} \phi_{4,x} = \phi_{2,x} \phi_{5,x} = \phi_{3,x} \phi_{5,x} = 0$$

se deduce que:

$$I_1 = K \underline{v}^T \int_0^l \begin{bmatrix} (\phi_{1,x} \cdot \phi_{1,x}) & (\phi_{1,x} \cdot \phi_{2,x}) & 0 & 0 & 0 \\ (\phi_{2,x} \cdot \phi_{1,x}) & (\phi_{2,x} \cdot \phi_{2,x}) & (\phi_{2,x} \cdot \phi_{3,x}) & 0 & 0 \\ 0 & (\phi_{3,x} \cdot \phi_{2,x}) & (\phi_{3,x} \cdot \phi_{3,x}) & (\phi_{3,x} \cdot \phi_{4,x}) & 0 \\ 0 & 0 & (\phi_{4,x} \cdot \phi_{3,x}) & (\phi_{4,x} \cdot \phi_{4,x}) & (\phi_{4,x} \cdot \phi_{5,x}) \\ 0 & 0 & 0 & (\phi_{5,x} \cdot \phi_{4,x}) & (\phi_{5,x} \cdot \phi_{5,x}) \end{bmatrix} dx \cdot \underline{u}$$

si se denomina $K_0 = \frac{4k}{l}$ se obtiene:

$$I_1 = \underline{v}^T \underline{K} \underline{u} \quad \text{con } \underline{K} = K_0 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

por otra parte *destruyendo*
 $I_2 = \int_0^l f v dx = \int_0^l \underline{v}^T \underline{\phi}^T f dx = \underline{v}^T \int_0^l \underline{\phi}^T f dx$
 si se denomina $F_0 = \frac{l \cdot f}{8}$ se deduce:

$$I_2 = \underline{v}^T \underline{F} f \quad \text{con } \underline{F} = F_0 [1 \ 2 \ 2 \ 2 \ 1]^T$$

y las integrales de borde son en este caso:

$$\sigma_0 v \Big|_0 = \sigma_0 v_1 = \underline{v}^T \underline{F}_{\sigma_1} \quad \text{con } \underline{F}_{\sigma_1} = \sigma_0 [1, 0, 0, 0, 0]^T$$

$$h(\mu - \bar{\mu}_5) v \Big|_e = h(\mu_5 - \bar{\mu}_5) v_5 = -\underline{v}^T \underline{F}_{h_2} + \underline{v}^T \underline{G}_2 \underline{u}^T$$

$$\text{con } \underline{F}_{h_2} = h \bar{\mu}_5 [0, 0, 0, 0, 1]^T$$

$$G_2 = G_0 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{con } G_0 = h$$

Se llega a la forma cuadrática:

$$\underline{v}^T (\underline{K} + \underline{G}_2) \underline{u} + \underline{v}^T (-\underline{F}_\ell + \underline{F}_{\sigma_1} - \underline{F}_{h_2}) = 0$$

Dado el carácter arbitrario de \underline{v}^T resulta el sistema:

$$(\underline{K} + \underline{G}_2) \underline{u} = \underline{F}_\ell - \underline{F}_{\sigma_1} + \underline{F}_{h_2} \quad [1.24]$$

El sistema, para los valores de las constantes consideradas, se convierte en:

$$\frac{4}{3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \frac{34}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -97 \\ 6 \\ 6 \\ 6 \\ 203 \end{bmatrix} \quad [1.25]$$

cuya solución es: $\underline{u} = (-251,6, -178,85, -110,6, -46,85, 12,4)$

Una vez conocida la distribución de temperatura $u(x)$ a partir de la expresión $u(x) = \sum_{i=1}^5 u_i \phi_i(x)$ se pueden obtener en cualquier punto de la barra resultados de interés (flujos, etc). En la tabla 1.2 se presentan los valores de las temperaturas obtenidos mediante el método de los elementos finitos y se comparan con los deducidos de la solución exacta. Se observa la total coincidencia entre estos resultados en los nudos de los elementos, apareciendo pequeñas ^{discrepancias} ~~disposiciones~~ en el interior (centro de gravedad) de los mismos. Sin embargo, en los resultados derivados, como el flujo, existe una discontinuidad en sus valores de los nudos, dependiendo del elemento que se considere.

1- Temperaturas ($^{\circ}\text{K}$)

(a) En nudos

Nudo	1	2	3	4	5
$u \backslash x$	0	1,5	3,0	4,5	6
Exacto	-251,60	-178,85	-110,60	-46,85	12,40
MEF	-251,60	-178,85	-110,60	-46,85	12,40

(b) En elementos

Elemento	1	2	3	4
$u \backslash x$	0,75	2,25	3,75	5,25
Exacto	-214,66	-144,16	-78,16	-16,66
MEF	-215,33	-144,73	-78,73	-17,23

2- Flujos (W/m^2)

(a) En nudos

Nudo	1	2		3		4		5
$q \backslash x$	0-E	1,5+E	1,5-E	3,0-E	3,0+E	4,5-E	4,5+E	6,0-E
Exacto	50	47	47	44	44	41	41	38
MEF	48,5	48,5	45,5	45,5	47,5	42,5	39,5	39,5

(b) En elementos

Elemento				
$q \backslash x$	0,75	2,25	3,75	5,25
Exacto	48,5	45,5	42,5	39,5
MEF	48,5	45,5	42,5	39,5

Por otra parte si se calculan los valores de los flujos σ en los puntos medios de los elementos se comprueba que la concordancia entre la solución exacta y la obtenida por el MEF es total. En capítulos posteriores se comentarán en detalle estas coincidencias. El cálculo anterior, y en especial la formación del sistema (1.24) se puede llevar a cabo de un modo mas sistemático y por lo tanto más adecuado para una programación en computador que el expuesto. A continuación se resumen los pasos mas importantes de esta técnica.

Se evalúa la contribución de cada elemento finito en las integrales de la fórmula (1.23). Para ello se considera las restricciones de cada función básica $\phi_n(x)$ sobre el elemento. Si i y j son los nudos del elemento, se puede escribir la expresión de la función de campo $u(x)$, dentro del elemento como sigue:

$$u(x) = u_i N_i^e(x) + u_j N_j^e(x) = \begin{bmatrix} N_i^e(x), N_j^e(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} \quad [1.26]$$

$$\text{o bien } u(x) = \underline{N}^e \underline{U}^e \quad \text{para } x \in (x_i, x_j)$$

$$\text{Analogamente } v(x) = \underline{N}^e \underline{V}^e \quad \text{para } x \in (x_i, x_j)$$

en donde $N_i^e(x)$ y $N_j^e(x)$ son las citadas restricciones al elemento $e \equiv i-j$ de las funciones básicas ϕ_i y ϕ_j respectivamente. Se denominan funciones de interpolación o forma del elemento e .

Las fórmulas (1.26) permiten calcular la contribución del elemento a las siguientes integrales, que aparecen en la expresión (1.23):

$$\int_{x_i}^{x_j} K \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx = \underline{V}^{eT} \left[\int_{x_i}^{x_j} \underline{N}_x^{eT} K \underline{N}_x^e dx \right] \underline{U}^e = \underline{V}^{eT} \underline{K}^e \underline{U}^e$$

$$\text{con } N_x^e = \frac{d}{dx} \underline{N}^e$$

$$\int_{x_i}^{x_j} f_v dx = \underline{V}^{eT} \int_{x_i}^{x_j} \underline{N}^{eT} f dx = \underline{V}^{eT} \underline{F}_f^e$$

Los siguientes términos sólo existen en los elementos con nudos en el borde, es decir, en los elementos 1 y 4 en este caso particular

$$\sigma_0 v \Big|_0 = \underline{V}^{eT} \underline{F}_{\sigma_1}^e$$

$$h(\mu - \bar{\mu}_s) v \Big|_l = \underline{V}^{eT} \underline{G}_2^e \underline{U}^e - \underline{V}^{eT} \underline{F}_{h_2}^e$$

Se deducen por lo tanto para cada elemento "e" las siguientes matrices y vectores, cuya expresión se indica para el caso mas general de sección variable:

-Matriz de conductividad:

$$\underline{K}^e = \int_{x_i}^{x_j} \underline{N}_x^{eT} k \underline{N}_x^e A dx \quad [1.27 a]$$

-Matriz de convección (*)

$$\underline{G}^e = \int_{x_i}^{x_j} \underline{N}^{eT} h \underline{N}^e A dx \quad [1.27 b]$$

-Matriz de convección respectivamente en los bordes i ó j del elemento:

$$\underline{G}_1^e = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} (hA)_{x=x_i} \quad [1.27 c]$$

$$\underline{G}_2^e = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} (hA)_{x=x_j}$$

NOTA(*): Aparece esta matriz \underline{G}^e del elemento cuando existe un término de convección distribuido, $h\mu$, en la transmisión del calor. La ecuación (1.20) se escribe en este caso

$$-\frac{1}{A} \frac{d}{dx} \left(A k \frac{d\mu}{dx} \right) + h\mu = f$$

-Vector de flujo de calor:

$$\underline{F}_f^e = \int_{x_i}^{x_j} \underline{N}^{eT} f A dx \quad [1.27 d]$$

-Vectores de flujo de calor respectivamente en los bordes i ó j del elemento:

$$\begin{aligned} \underline{F}_{\sigma 1}^e &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} (\sigma A)_{x=x_i} \\ \underline{F}_{\sigma 2}^e &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (\sigma A)_{x=x_j} \end{aligned} \quad [1.27 e]$$

-Vectores de flujo de calor por convección respectivamente en los bordes i ó j del elemento:

$$\begin{aligned} \underline{F}_{h1}^e &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} (h A u_s)_{x=x_i} \\ \underline{F}_{h2}^e &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (h A u_s)_{x=x_j} \end{aligned} \quad [1.27 f]$$

Las anteriores matrices y vectores se combinan de un modo sistemático y forman así el sistema de ecuaciones (1.24), es decir, en general el sistema de ecuaciones:

$$(\underline{k} + \underline{G} + \underline{G}_2 - \underline{G}_1) \underline{U} = \underline{F}_f + \underline{F}_{\sigma 2} - \underline{F}_{\sigma 1} + \underline{F}_{h2} - \underline{F}_{h1}$$

Para ello basta considerar que las integrales de la expresión (1.23) pueden obtenerse como suma de las correspondientes a cada elemento:

$$\int_0^l (\cdot) dx = \sum_{e=1}^{NE} \int_{x_i}^{x_j} (\cdot) dx$$

con NE el número de elementos. (En este caso $NE = 4$). De este modo resultan las siguientes expresiones generales, para los distintos términos de la matriz K:

$$K_{11} = \sum_{e \in E_1^1} K_{11}^e + \sum_{e \in E_2^1} K_{22}^e$$

$$K_{12} = \sum_{e \in E_{12}^1} K_{12}^e + \sum_{e \in E_{21}^1} K_{21}^e \quad [1.28]$$

con

$$\underline{K}^e = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}$$

E_A^α es el conjunto de los elementos e cuyo extremo α ($\alpha=1$, primero y $\alpha=2$, segundo) coincide con el nudo A ($A=1,2$)

$E_{AB}^{\alpha\beta}$ es el conjunto de los elementos e cuyo α -extremo (primero o segundo) y β -extremo (segundo o primero) coinciden respectivamente con los nudos A y B ($A, B=1,2$).

De modo semejante (suma booleana) se componen las matrices \underline{G}_2 , \underline{G}_1 y \underline{G}_1 .

Con relación a los vectores de flujo \underline{F}_p se obtiene:

$$\underline{F}_{p1} = \sum_{e \in E_1^1} \underline{F}_{11}^e + \sum_{e \in E_2^1} \underline{F}_{12}^e \quad [1.29]$$

con
$$\underline{F}_f^e = \begin{bmatrix} F_{f_1}^e \\ F_{f_2}^e \end{bmatrix}$$

Fórmulas análogas (suma booleana) se aplican para obtener los restantes vectores \underline{F}_{σ_2} , \underline{F}_{σ_1} , \underline{F}_{h_2} , \underline{F}_{h_1} .

En el caso particular de elementos con características constantes dentro del mismo las fórmulas (1.27) se convierten en las siguientes:

$$\underline{K}^e = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \left(\frac{KA}{l} \right)_e$$

$$\underline{G}^e = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} (hA)_e$$

$$\underline{F}_f^e = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} (\ell A \ell)_e$$

con $\ell = |x_j - x_i|$ la longitud del elemento.

Resultan los siguientes valores numéricos (el área A no se considera):

$$\underline{K}^e = 1,3333 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{para } e = 1,2,3,4$$

$$\underline{F}_f^e = 3,0000 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{para } e = 1,2,3,4$$

$$F_{r_1}^e = 100,0000 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{para } e = 1$$

$$F_{b_2}^e = 200,0000 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{para } e = 4$$

$$G_2^e = 10,0000 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{para } e = 4$$

Aplicando las fórmulas (1.27) se llega a un sistema idéntico al (1.25).

Se observa que la disposición de los coeficientes del sistema es dependiente de la numeración de los nudos. Es posible efectuar esta numeración de modo que todos los coeficientes de la matriz se encuentren situados dentro de una banda de diagonales paralelas a la principal, y que el ancho de esta banda sea mínimo. El ancho NB de la banda viene dado por la expresión:

$$NB = 2 \max |i - j| + 1 = 2 * M + 1$$

Conocido este valor del ancho de banda es posible almacenar todos los coeficientes de la matriz del sistema (1.24) dentro de un archivo de memoria de un computador de dimensión $N * (M + 1)$ donde N es el número total de nudos y $M + 1$ corresponde al semiancho de banda ya que la matriz de coeficientes es simétrica. En capítulos posteriores se insistirá sobre éstas posibilidades de programación, así como en los procedimientos actuales de evaluación de las integrales de cada elemento (fórmulas 1.27).

1.5.- GENERALIZACION A PROBLEMAS DE ORDEN SUPERIOR

1.5.1.- PROBLEMAS DE CONTORNO

Las técnicas descritas en el apartado anterior referente a problemas de contorno de clase $k=1$, pueden ser extendidas a otras situaciones más complejas con valores de derivadas superiores.

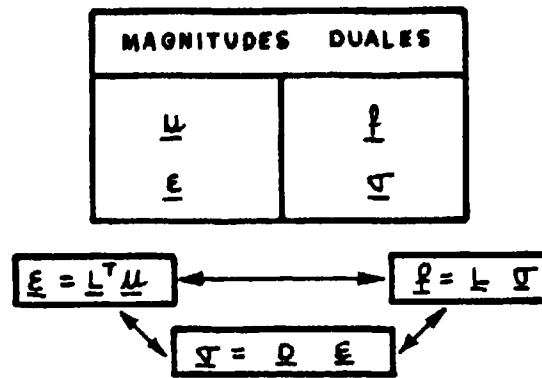
Fenómenos físicos susceptibles de ser simulados mediante estos tipos de problemas de contorno de orden elevado son numerosos. En la figura 1.5 se representa el esquema de planteamiento de estos problemas, que se suponen en principio lineales y conservativos.

Sea $\underline{\mu} = \underline{\mu}(x)$ la función incógnita básica de campo de dimensión $m \times \eta$, es decir, correspondiente a una aplicación de R^n en R^m . La magnitud dual, fuente \underline{f} , es de análoga dimensión. El operador diferencial \underline{L} de orden k , y cuya dimensión es $m \times l$ permite obtener las magnitudes derivadas $\underline{\varepsilon}(x)$ y $\underline{\sigma}(x)$, gradiente y deformación de campo (de l componentes) de acuerdo con las fórmulas:

$$\begin{aligned}\underline{\varepsilon} &= \underline{L}^T \underline{\mu} \\ \underline{f} &= \underline{L} \underline{\sigma}\end{aligned}\quad [1.30]$$

Las magnitudes $\underline{\sigma}$ y $\underline{\varepsilon}$ se relacionan mediante la ecuación constitutiva del material, constante k en el caso 1-D y que aquí se designa usualmente por la matriz de constantes \underline{D} de dimensión $l \times l$:

$$\underline{\sigma} = \underline{D} \underline{\varepsilon} \quad [1.31]$$



Equilibrio

$$\underline{f} = \underline{L} \underline{\sigma} = \underline{L} \underline{D} \underline{\varepsilon} = \underline{L} \underline{D} \underline{L}^T \underline{\mu}$$

Problema de contorno. Solución básica

$$\begin{aligned} \underline{L} \underline{D} \underline{L}^T \underline{\mu} &= \underline{f} & \text{para } \underline{x} \in A \\ \underline{D}_i^* \underline{\mu} - \underline{\mu}_{i_0} &= 0 & \text{para } \underline{x} \in \bar{A}_i \quad (i = 1, 2, \dots, k) \\ \underline{B}_i^* \underline{\mu} - \underline{\sigma}_{i_0} &= 0 & \text{para } \underline{x} \in \bar{A}'_i \quad (i = 1, 2, \dots, k) \end{aligned}$$

Problema de contorno. Solución débil

$$\int_A [(\underline{L}^T \underline{v})^T \underline{D} (\underline{L}^T \underline{\mu}) - \underline{v}^T \underline{f}] dA - \sum_{i=1}^k \int_{\bar{A}_i} \underline{\sigma}_{i_0}^T \underline{D}_i^* \underline{v} d\bar{A} = 0$$

Principio energético

$$J(\underline{\mu}) = \frac{1}{2} \int_A (\underline{\varepsilon}^T \underline{\sigma} - 2 \underline{\mu}^T \underline{f}) dA - \sum_{i=1}^k \int_{\bar{A}_i} \underline{\sigma}_{i_0}^T \underline{D}_i^* \underline{\mu} d\bar{A}$$

ó

$$J(\underline{\mu}) = \frac{1}{2} \int_A [(\underline{L}^T \underline{\mu})^T \underline{D} (\underline{L}^T \underline{\mu}) - 2 \underline{\mu}^T \underline{f}] dA - \sum_{i=1}^k \int_{\bar{A}_i} \underline{\sigma}_{i_0}^T \underline{D}_i^* \underline{\mu} d\bar{A}$$

con

$$\begin{aligned} \underline{D}_i^* \underline{\mu} - \underline{\mu}_{i_0} &= 0 & \text{para } \underline{x} \in \bar{A}_i \\ \underline{D}_i^* \underline{v} &= 0 & \text{para } \underline{x} \in \bar{A}_i \\ \underline{\mu} \text{ y } \underline{v} & \text{ con derivadas de orden } & \text{cuyo cuadrado es integrable} \end{aligned}$$

El problema de contorno se formula directamente como sigue:

$$\underline{L} \underline{D} \underline{L}^T \underline{u} = \underline{f} \quad \text{para } x \in A \quad [1.32a]$$

$$\underline{B} \underline{u} = \underline{0} \quad \text{para } x \in \bar{A} \quad [1.32b]$$

El operador $\tilde{L} = \underline{L} \underline{D} \underline{L}^T$ es de orden $2 \cdot k$ y dimensión $m \times m$. El operador de contorno \underline{B} tiene como orden máximo $2k-1$ y corresponde a una matriz de dimensión $mk \times m$.

Si el problema de contorno es bien puesto las k condiciones de borde - (1.32b)

$$\underline{B}_i \underline{u} = \underline{0} \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

deben identificarse a uno de los tipos alternativos siguientes:

$$\underline{D}_i^* (\underline{u}) - \underline{u}_{oi} = 0 \quad [1.33a]$$

$$\underline{B}_i^* (\underline{u}) - \underline{\nabla}_{oi} = 0 \quad [1.33b]$$

con

$$\underline{D}_i^* \equiv \frac{\partial^{i-1}}{\partial n_i^{i-1}}$$

operador derivada $(i-1)$ -sima según la dirección normal al contorno \bar{A} y de dimensión $(n \times m)$.

\underline{B}_i^* sucesivos operadores diferenciales de orden máximo $2k-1$. Dimensión $(m \times m)$

siendo :

\underline{u}_{oi} y $\underline{\nabla}_{oi}$ valores especificados en el punto del contorno.

Las condiciones de contorno del tipo (1.33a) se denominan esenciales y corresponden en los problemas estructurales a movimientos especificados. Las condiciones de contorno excluyentes de las anteriores se conocen como condiciones naturales (1.33b) y en el cálculo de estructuras representan fuerzas generalizadas aplicadas en el contorno.

Para cada índice i , se puede dividir el contorno \bar{A} , en dos partes distintas \bar{A}_i y \bar{A}'_i , correspondientes a los conjuntos de puntos para los que se plantean condiciones esenciales y naturales respectivamente.

La solución débil del problema (1.32) corresponde a la ecuación variacional:

$$\int_A \underline{v}^T \underline{L} \underline{D} \underline{L}^T \underline{u} dA = \int_A \underline{v}^T \underline{f} dA \quad [1.34]$$

$$\underline{B} \underline{u} = 0$$

para toda función \underline{v} de dimensión $m \times n$

Utilizando la fórmula de Green en la primera de las ecuaciones (1.34) k veces se llega a la expresión:

$$\int_A [(\underline{L}^T \underline{v})^T \underline{D} (\underline{L}^T \underline{u}) - \underline{v}^T \underline{f}] dA - \sum_{i=1}^h \int_{\bar{A}} \underline{D}_i^* \underline{v} \cdot \underline{B}_i^* \underline{u} d\bar{A} = 0 \quad [1.35]$$

Se eligen las funciones de prueba \underline{v} de modo que sean admisibles, es decir, satisfagan las condiciones de contorno esenciales nulas

$$\underline{D}_i^* \underline{v} = 0 \quad \text{para } x \in \bar{A}_i \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

y sus derivadas de orden k sean suaves (sus cuadrados puedan ser integrables en el sentido de Lebesgue). En este caso, la expresión (1.35) se convierte en la siguiente:

$$\int_A \left[(\underline{L}^T \underline{v})^T \underline{D}(\underline{L}^T \underline{u}) - \underline{v}^T \underline{f} \right] dA - \sum_{i=1}^k \int_{\bar{A}_i} \sigma_{i0} D_i^* \underline{v} d\bar{A} = 0 \quad [1.36]$$

con $D_i^* \underline{u} = \underline{u}_{i0}$ para $\underline{x} \in \bar{A}_i$ ($i = 1, 2, \dots, k$)

Esta ecuación permite aplicar el método de los elementos finitos con el menor grado de exigencia de continuidad (del orden C^{k-1}) en las funciones básicas.

Existe una formulación débil alternativa a la ecuación (1.36) correspondiente a la minimización del funcional siguiente:

$$J(\underline{v}) = \frac{1}{2} \int_A \left[(\underline{L}^T \underline{u})^T \underline{D}(\underline{L}^T \underline{u}) - 2 \underline{u}^T \underline{f} \right] dA - \sum_{i=1}^k \int_{\bar{A}_i} \sigma_{i0} D_i^* \underline{u} d\bar{A} \quad [1.37]$$

\underline{u} minimiza $J(\underline{v})$ y satisface $D_i^* \underline{u} = \underline{u}_{i0}$ en $\underline{x} \in \bar{A}_i$ para $i = 1, 2, \dots, k$

Ejemplo 1.5.

Ecuación de una placa delgada homogénea e isotrópa en hipótesis de Kirchhoff bajo la acción de una carga normal.

En este caso la función de campo corresponde a $w = w(x_1, x_2)$ la flecha normal. La intensidad de carga normal $f(x_1, x_2)$. Las magnitudes derivadas son:

El vector curvatura $\underline{\varepsilon} = [\omega_{,11}; \omega_{,22}; 2\omega_{,12}]^T$ es decir:

$$\underline{\varepsilon} = \underline{L} \omega \quad \text{con} \quad \underline{L} = \left[\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, 2 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \right]^T$$

El vector momentos $\underline{\sigma} = [m_{,11}, m_{,22}, m_{,12}]^T$

Estos se relacionan con la carga distribuida f mediante la siguiente ecuación de equilibrio

$$m_{,1111} + 2m_{,12,12} + m_{,22,22} = f$$

es decir: $\underline{L}^T \underline{\sigma} = f$

La relación momentos-curvaturas es directamente:

$$\underline{\sigma} = \underline{D} \cdot \underline{\varepsilon}$$

$$\text{con } \underline{D} = D \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix}$$

$D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}$ la constante de flexión de la placa.

La ecuación diferencial que resulta es:

$$\omega_{,1111} + 2\omega_{,1122} + \omega_{,2222} = \frac{f}{D}$$

Integrando por partes esta ecuación multiplicada por la función de prueba hasta alcanzar la expresión (1.36) se deducen las condiciones naturales de contorno:

Condiciones esenciales

Condiciones naturales

$$i = 1 \quad w = 0$$

$$- D \left[\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right) + 2(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial n \partial s} \right] = \bar{\sigma}_{01}$$

$$i = 2 \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0$$

$$- D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right) = \bar{\sigma}_{02}$$

siendo n y s las direcciones normal y tangente a la curva del contorno \bar{A} . Las condiciones naturales representan la reacción cortante de Kirchhoff y el momento flector.

1.5.2.- APLICACION DEL MEF

Los procedimientos de Galerkin y Ritz, descritos en apartados anteriores son totalmente aplicables a la resolución de los problemas (1.36) y (1.37). La única variación en las condiciones que deben satisfacer las funciones de forma $\phi_n(x)$ consiste en que ahora su derivada k -sima existe y sea suficientemente suave. Esta exigencia no plantea, en general, ningún problema en las formulaciones típicas de Galerkin y Ritz, que utilizan funciones globales, sin embargo, en el caso particular del MEF constituye un aspecto que debe ser cuidadosamente considerado.

En el MEF las funciones de forma son locales, es decir, para cada nudo o mejor para cada grado de libertad se especifica una función con valores no nulos en el dominio constituido por los elementos en su nudo común. Por otra parte se adoptan coordenadas o parámetros generalizados con un significado físico

inmediato: los valores de la función de campo con los sucesivos nudos. La extensión de esta situación, comentada en el apartado 1.4.4. para el caso C^0 (funciones con derivada primera suave), a problemas C^{k-1} exige que en el nudo i para el que genera la función básica ϕ_i (en realidad mQ , funciones básicas ϕ_n^i correspondientes a cada componente de \underline{u}) se tiene que asegurar la continuidad C^{k-1} , es decir, especificar valores únicos en el nudo i , no sólo de la función de campo \underline{u} sino de sus derivadas (en cualquier dirección) hasta el orden $k-1$, inclusive. Se consigue esta situación introduciendo nuevas coordenadas o parámetros generalizados en el nudo i correspondientes a los valores en el nudo i de \underline{u} y sus $k-1$ primeras derivadas en las direcciones coordenadas. Este procedimiento supone generar igual número de funciones básicas que se obtienen por simple derivación de la función básica ϕ_i . En términos más concretos, en cada nudo i se adoptan los siguientes parámetros o coordenadas generalizadas:

$$\begin{aligned} \underline{u}_i &= \underline{u}(\underline{x}) \Big|_{\underline{x}=\underline{x}_i} = [\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m]_{\underline{x}=\underline{x}_i}^T \\ \underline{u}_{1i} &= \frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{x}} \Big|_{\underline{x}=\underline{x}_i} = [\mu_{1,1}, \mu_{1,2}, \mu_{1,n}, \dots, \mu_{m,1}, \dots, \mu_{m,n}]_{\underline{x}=\underline{x}_i}^T \\ \underline{u}_{2i} &= \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial \underline{x}^2} \Big|_{\underline{x}=\underline{x}_i} = [\mu_{1,n}, \dots, \mu_{1,nn}, \dots, \mu_{m,1}, \dots, \mu_{m,nn}]_{\underline{x}=\underline{x}_i}^T \\ &\vdots \\ \underline{u}_{(k-1)i} &= \frac{\partial^{k-1} \underline{u}}{\partial \underline{x}^{k-1}} \Big|_{\underline{x}=\underline{x}_i} = [\underbrace{\mu_{1,111\dots 1}}_{(k-1) \text{ veces}}, \dots, \underbrace{\mu_{m,nnn\dots n}}_{(k-1) \text{ veces}}]_{\underline{x}=\underline{x}_i}^T \end{aligned} \quad [1.38]$$

con

$$\begin{aligned} \underline{x} &= (x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ sistema de coordenadas} \\ \underline{x}_i &= (x_1^i, x_2^i, \dots, x_n^i) \text{ coordenadas del nudo } i \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^\lambda \underline{u}}{\partial \underline{x}^\lambda} = \left[\frac{\partial^\lambda \underline{u}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n}} \right] \quad (\lambda = 1, 2, \dots, k-1)$$

$$\alpha_1 \geq 0 \quad \alpha_2 \geq 0 \quad \dots \quad \alpha_n \geq 0$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = \lambda$$

Por lo tanto, la función de campo $\underline{u}(\underline{x})$ adquiere la siguiente forma:

$$\underline{u}(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{NN} (\underline{\phi}^i \underline{u}_i + \underline{\phi}_1^i \underline{u}_{1i} + \dots + \underline{\phi}_{k-1}^i \underline{u}_{(k-1)i}) \quad [1.39]$$

con NN el número de nudos que existen en la malla de elementos finitos y

$$\underline{\phi}^i = \underline{\phi}^i(\underline{x}) = [\phi_1^i, \phi_2^i, \dots, \phi_m^i]$$

$$\underline{\phi}_\lambda^i = \underline{\phi}_\lambda^i(\underline{x}) = [\phi_{1\lambda}^i, \phi_{2\lambda}^i, \dots, \phi_{m\lambda}^i]$$

las sucesivas funciones básicas.

A partir de la ecuación (1.39) se deducen las siguientes propiedades de las funciones básicas que se expresan a continuación para cada componente $\phi_\mu^i, \phi_{\mu\lambda}^i$ ($\mu = 1, 2, \dots, m$) y derivada respecto a cada variable x_ν ($\nu = 1, 2, \dots, n$):

$$\phi_\mu^i(\underline{x}_j) = \delta_{ij} \quad (i \neq j \quad \delta_{ij} = 0 ; i = j \quad \delta_{ij} = 1)$$

$$\left. \frac{d^\lambda}{dx_\nu^\lambda} \phi_\mu^i(\underline{x}) \right|_{\underline{x}=\underline{x}_j} = 0 \quad (\lambda = 1, 2, \dots, k-1)$$

[1.40]

$$\phi_{\lambda\mu}^i(\underline{x}_j) = 0$$

$$\frac{\partial^\lambda \underline{u}}{\partial \underline{x}^\lambda} = \left[\frac{\partial^\lambda \underline{u}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n}} \right] \quad (\lambda = 1, 2, \dots, k-1)$$

$$\alpha_1 \geq 0 \quad \alpha_2 \geq 0 \quad \dots \quad \alpha_n \geq 0$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = \lambda$$

Por lo tanto, la función de campo $\underline{u}(\underline{x})$ adquiere la siguiente forma:

$$\underline{u}(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{NN} (\phi^i \underline{u}_i + \phi_1^i \underline{u}_{1,i} + \dots + \phi_{k-1}^i \underline{u}_{(k-1),i}) \quad [1.39]$$

con NN el número de nudos que existen en la malla de elementos finitos y

$$\phi^i = \phi^i(\underline{x}) = [\phi_1^i, \phi_2^i, \dots, \phi_n^i]$$

$$\phi_\lambda^i = \phi_\lambda^i(\underline{x}) = [\phi_{1,\lambda}^i, \phi_{2,\lambda}^i, \dots, \phi_{n,\lambda}^i]$$

las sucesivas funciones básicas.

A partir de la ecuación (1.39) se deducen las siguientes propiedades de las funciones básicas que se expresan a continuación para cada componente $\phi_\mu^i, \phi_{\mu,\lambda}^i$ ($\mu = 1, 2, \dots, m$) y derivada respecto a cada variable x_ν ($\nu = 1, 2, \dots, n$):

$$\phi_\mu^i(\underline{x}_j) = \delta_{ij} \quad (i \neq j \quad \delta_{ij} = 0 \quad ; \quad i = j \quad \delta_{ij} = 1)$$

$$\left. \frac{d^\lambda}{dx_\nu^\lambda} \phi_\mu^i(\underline{x}) \right|_{\underline{x}=\underline{x}_j} = 0 \quad (\lambda = 1, 2, \dots, k-1)$$

[1.40]

$$\phi_{\lambda,\mu}^i(\underline{x}_j) = 0$$

que se suelen denominar grados de libertad del nudo i , y tratarla como una coordenada generalizada independiente de su sentido físico.

Se definen la restricción de las funciones básicas $\underline{\phi}^i$ y $\underline{\phi}_{\lambda}^i$, sobre cada elemento, obteniéndose las correspondientes funciones de forma \underline{N}^i y $\underline{N}_{\lambda}^i$. Para cada uno de los nudos del elemento $i = 1, 2, \dots, NNE$ se deducen las funciones de forma: $\bar{\underline{N}}^i = (\underline{N}^i, \underline{N}_1^i, \dots, \underline{N}_{k-1}^i)$.

La expresión de la función de campo $\underline{\mu}(x)$ dentro del elemento (e) se escribe entonces:

$$\underline{\mu}(x) = \bar{\underline{N}}^e(x) \underline{U}^e \quad [1.41]$$

$$\bar{\underline{N}}^e(x) = (\bar{\underline{N}}^1, \bar{\underline{N}}^2, \dots, \bar{\underline{N}}^{NNE})$$

$$\underline{U}^e = (\underline{U}_1^e, \underline{U}_2^e, \dots, \underline{U}_{NNE}^e)$$

$$\text{y } \underline{U}_i^e = (\underline{\mu}_i, \underline{\mu}_{1i}, \underline{\mu}_{2i}, \dots, \underline{\mu}_{(k-1)i}) \text{ es un vector}$$

de parámetros o coordenadas generalizadas del nudo del elemento con un número de orden α que coincide con el nudo i .

Se determina el vector deformación $\underline{\varepsilon}$, mediante la expresión (1.30) para cada elemento

$$\underline{\varepsilon} = \underline{L}^T \underline{\mu}(x) = \underline{L}^T \bar{\underline{N}}^e \cdot \underline{U}^e = \underline{B}^e \underline{U}^e \quad \text{con } \underline{B}^e = \underline{L}^T \bar{\underline{N}}^e$$

En la aplicación del método de Ritz se puede obtener la contribución del elemento (e) a la funcional de la expresión (1.37).

$$J^e(\underline{u}) = \frac{1}{2} \underline{u}^{eT} \underline{K}^e \underline{u}^e - \underline{u}^{eT} \underline{F}_f^e - \underline{u}^{eT} \underline{F}_\sigma^e \quad [1.42]$$

siendo

$$\underline{K}^e = \int_{A_e} (\underline{B}^{eT} \underline{D}^e \underline{B}^e) dA$$

$$\underline{F}_f^e = \int_{A_e} \underline{N}^{eT} \underline{f} dA \quad [1.43]$$

$$\underline{F}_\sigma^e = \left\{ \underline{F}_{\sigma i}^e \right\}$$

$$\underline{F}_{\sigma i}^e = \int_{\bar{A}_i} \bar{A}_e (M^{iT} \underline{N}^{eT} \underline{\sigma}_{10}) d\bar{A}_i \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

\bar{A}_e es el contorno del dominio A_e del elemento e .

M^i es una matriz de transformación de la derivada normal $\frac{\partial^i}{\partial n^i}$ en el contorno \bar{A}_i según las componentes de los ejes generales.

La funcional (1.37) se calcula sumando las contribuciones de todos los elemento (e) a la misma, es decir:

$$J(\underline{u}) = \sum_{e=1}^{NE} J^e(\underline{u}) = \frac{1}{2} \underline{U}^T \underline{K} \underline{U} - \underline{U}^T \underline{F} \quad [1.44]$$

$$\text{con } \underline{K} = \sum_{e=1}^{NE} \underline{K}_e \quad \underline{F} = \sum_{e=1}^{NE} \underline{F}_f^e + \underline{F}_\sigma^e$$

$$\underline{U} = (\bar{U}_1, \bar{U}_2, \dots, \bar{U}_{NN})$$

NE = número de elementos

NN = número de nudos

La suma de las matrices $\underline{k}_e, \underline{F}_f^e$ y \underline{F}_v^e elementales precisa para obtener las matrices globales \underline{K} y \underline{F} se efectúa considerando la identidad del nudo de orden α del elemento e con el nudo designado globalmente por el número i (suma booleana).

El mínimo de la forma cuadrática (1.44) conduce al sistema

$$\underline{K} \underline{U} - \underline{F} = 0 \quad [1.45]$$

con las especificaciones de las componentes del vector \underline{U} en los nudos situados en el contorno \bar{A}_e , es decir:

$$\underline{M}^l \underline{U} - \underline{u}_{e0} = 0 \quad [1.46]$$

La resolución de la ecuación (1.45) con las restricciones (1.46) permite obtener el vector \underline{U} y por lo tanto mediante la expresión (1.41) deducir el valor de la función de campo $\mu(x)$ en cualquier punto del dominio.

En el ejemplo que se describe en el siguiente apartado se insistirá en la metodología que se utiliza.

1.5.3.- EJEMPLO ILUSTRATIVO

Calcular la viga representada en la figura 1.6a mediante el método de los elementos finitos.

El problema de contorno que gobierna el comportamiento estructural de la viga es un caso particular (1-D) del ejemplo del apartado 1.5, y puede escribirse:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} (EI \frac{d^2 u}{dx^2}) &= p(x) & \text{para} & \quad 0 \leq x \leq a \\ u &= 0; -EI \frac{d^2 u}{dx^2} = M_0 & \text{para} & \quad x = 0 \\ u &= 0; \frac{du}{dx} = 0 & \text{para} & \quad x = a \end{aligned} \quad [1.47]$$

con $u(x)$ la flecha normal

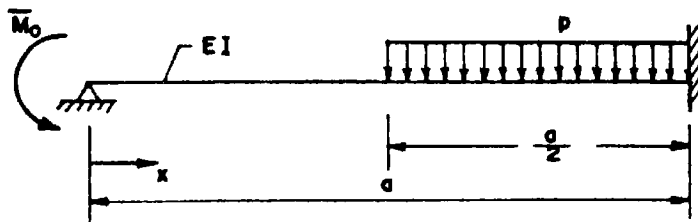
$p(x)$ la función carga distribuida definida por la expresión:

$$\begin{aligned} p(x) &= 0 & \text{para} & \quad 0 < x \leq \frac{a}{2} \\ p(x) &= p & \text{para} & \quad \frac{a}{2} < x \leq a \end{aligned}$$

La formulación débil del problema (1.47) es: Encontrar $u(x)$ tal que satisfaga las condiciones $u(0) = u(l) = \left(\frac{du}{dx} \right)_{x=a} = 0$

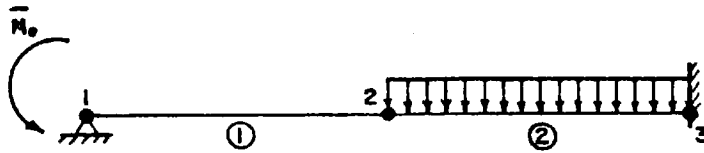
y minimice el funcional:

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^a EI \left(\frac{d^2 u}{dx^2} \right)^2 dx - \int_{\frac{a}{2}}^a p u dx - \bar{M}_0 \frac{du}{dx} \Big|_{x=0} \quad [1.48]$$

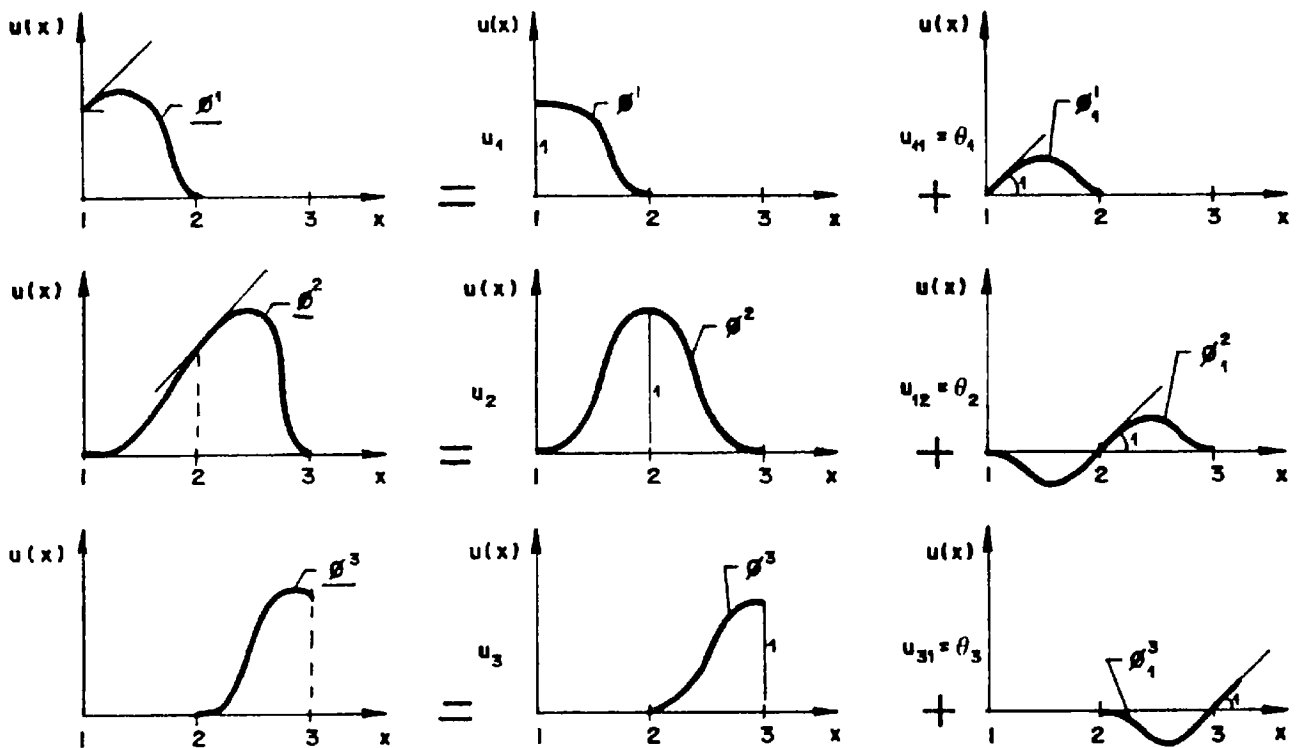


a) Problema físico

$$\bar{M}_0 = p a^2$$



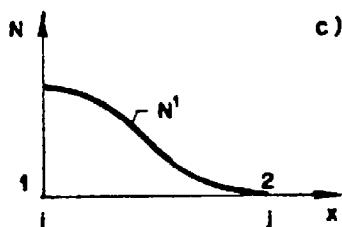
b) Discretización en elementos finitos



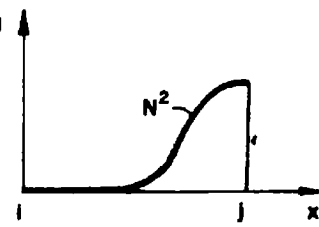
$$u(x) = u_1 \phi^1(x) + u_{11} \phi_1^1(x) + u_2 \phi^2(x) + u_{12} \phi_1^2(x) + u_3 \phi^3(x) + u_{13} \phi_1^3(x) =$$

$$= \sum_{i=1}^3 u_i \phi^i(x) + u_{1i} \phi$$

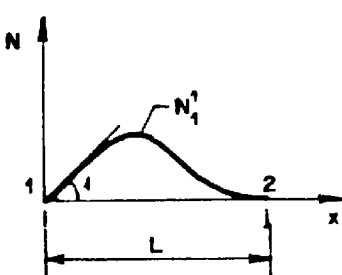
c) Funciones básicas



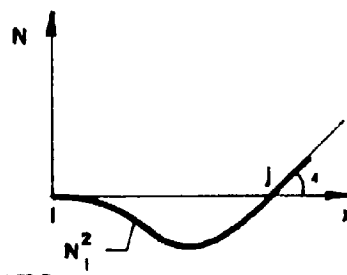
$$N^1 = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3$$



$$N^2 = 3\xi^2 - 2\xi^3$$



$$N_1^1 = (\xi - 2\xi^2 + \xi^3)L$$



$$N_1^2 = (-\xi^2 + \xi^3)L$$

$$(\xi = \frac{x}{L})$$

d) Funciones de forma

FIG. 1.6. - EJEMPLO 1.5.3

Se consideran dos elementos y tres nudos como se representa en la figura 1.6b. Las funciones básicas se indican en la figura 1.6c y las de forma para cada elemento, son las expresiones polinómicas cúbicas (polinomios de Hermite) que se muestran en la figura 1.6d.

Los vectores de incógnitas básicas son en cada nudo $i, \bar{U}_i = (\mu_i, \theta_i)$, es decir, los valores de la flecha y el giro en el nudo.

La expresión de la flecha $\mu(x)$ en el elemento e es:

$$\mu(x) = (\bar{N}^i, \bar{N}^j) \begin{pmatrix} \bar{U}_i \\ \bar{U}_j \end{pmatrix} \quad [1.49]$$

con

$$\bar{N}^i = (N^i, N_1^i)$$

vector de forma de dimensión (1x2).

El operador L^T que relaciona la deformación $\underline{\epsilon} = \left(\frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} \right)$ y la función de campo $\mu(x)$ es:

$$L^T = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)$$

resultando por lo tanto:

$$\underline{B}^e = \underline{L}^T \underline{N}^e = (\underline{L}^T \underline{N}^i, \underline{L}^T \underline{N}^j)$$

es decir

$$\underline{B}^e = \left[-\frac{6}{l^2} + \frac{12x}{l^3}, -\frac{4}{l} + \frac{6x}{l^2}; \frac{6}{l^2} - \frac{12x}{l^3}; -\frac{2}{l} + \frac{6x}{l^2} \right] \quad [1.50]$$

con $l = \frac{a}{2}$ la longitud del elemento.

La matriz de rigidez de acuerdo con la fórmula (1.43) y $D = EI$, es

$$\underline{K}^e = \int_0^l \underline{B}^{eT} EI \underline{B}^e dx = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix}$$

y el vector de cargas consistentes (sólo existe para el elemento $e = 2$).

$$\underline{F}_f^e = \int_0^l \underline{N}^{eT} p dA = q \begin{bmatrix} l/2 \\ l^2/12 \\ l/2 \\ -l^2/12 \end{bmatrix}$$

El momento en el contorno produce el siguiente término correspondiente al elemento $e = 1$:

$$\underline{F}_f^e = \bar{M}_0 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Componiendo las matrices \underline{K}^e y vectores \underline{F}_f^e y \underline{F}_f^e se deduce la ecuación:

$$\frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l & 0 & 0 \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 & 0 & 0 \\ -12 & -6l & 24 & 0 & -12 & 6l \\ 6l & 2l^2 & 0 & 8l^2 & -6l & 2l^2 \\ 0 & 0 & -12 & -6l & 12 & -6l \\ 0 & 0 & 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \theta_1 \\ \mu_2 \\ \theta_2 \\ \mu_3 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{u1} \\ \bar{M}_0 \\ q l / 2 \\ q l^2 / 12 \\ F_{u3} \\ F_{\theta 3} \end{bmatrix}$$

Los valores F_{u1} , F_{u3} y $F_{\theta 3}$ son incógnitas pero las condiciones esenciales de contorno producen tres ecuaciones adicionales:

$$\mu_1 = 0 ; \mu_3 = 0 \text{ y } \theta_3 = 0$$

El sistema anterior se puede reformular como sigue:

$$\frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -6l & 24 & 0 \\ 2l^2 & 0 & 8l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \mu_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4l^2 \\ (1/2)l \\ (1/12)l^2 \end{bmatrix} q \quad [1.51]$$

cuya solución es:

$$\theta_1 = \frac{197}{96} \frac{q l^2}{EI}$$

$$\mu_2 = \frac{621}{1152} \frac{q l^3}{EI} \quad [1.52]$$

$$\theta_3 = \frac{-543}{1152} \frac{q l^2}{EI}$$

Se comprueba el nivel de satisfacción del equilibrio de momentos en el nudo 1 (condición natural de contorno):

$$M = -EI \left. \frac{d^2 u}{dx^2} \right|_{x=0} = \underline{B}^e \underline{U}^e \Big|_{x=0} \quad \text{para } e=1$$

resulta:

$$M = - \left(\frac{-6}{\ell^2}, \frac{-4}{\ell}, \frac{6}{\ell^2}, \frac{-2}{\ell} \right) \begin{pmatrix} u_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \frac{4644}{1152} q \ell^2 = 4,03 q \ell^2 \simeq 4 q \ell^2$$

Se observa que se satisface el equilibrio con un error del 1% aproximadamente.

En general las condiciones naturales de contorno se satisfacen en el límite en el MEF.

Una vez deducidos los valores de las incógnitas U es posible obtener en cualquier sección x de la viga la flecha o función de campo $u(x)$ mediante la expresión (1.49) para cada elemento, y por lo tanto cualquier resultado derivado de $u(x)$ (momentos, cortantes, etc).

CAPITULO 1.- EJERCICIOS

- 1.1.- Repetir el problema del apartado 1.4.5 del texto utilizando el método de Ritz. Evaluar el mínimo exacto de la funcional y comprobarlo con el obtenido mediante el MEF.

Efectuar una experimentación numérica en el MEF modificando el número de elementos (1, 2 y 3) así como las luces respectivas. Utilizar el valor mínimo de la funcional como criterio de la bondad relativa entre los distintos cálculos.

- 1.2.- Calcular el problema del apartado 1.4.5 considerando la modificación que en el extremo ($x = \ell$) se impone una condición de contorno de tipo esencial ($\mu = 12.4^\circ\text{C}$). ¿Que técnica utilizaría?. Podría suponerse un valor de la convección h en ese punto muy grande? Comente ventajas y desventajas entre los distintos procedimientos considerando cálculo manual y automático.

Si la condición en el extremo ($x = \ell$) se modificase por una del tipo natural ($k \frac{du}{dx} = \overline{T}_0$). ¿Qué comentarios podrían expresarse respecto a la unicidad de la solución?. Sugiera un valor adecuado para el flujo \overline{T}_0 .

- 1.3.- Plantear el problema de la placa ortotropa, es decir, con una matriz constitutiva $D = \{D_{ij}\}$ tal que $D_{31} = D_{32} = D_{13} = D_{23} = 0$. Condiciones pa
ra que este problema sea autoadjunto.

- 1.4.- Resolver el problema ilustrativo del apartado 1.5.3. utilizando 3 elementos finitos. Calcular los valores de la funcional y del momento flector en la sección $x = 0$ y compararlos con los que se obtienen mediante dos elementos. Deducir el valor mínimo exacto de la funcional.
- 1.5.- Utilizar polinomios de Hermite (hiperelementos) en la resolución del problema del apartado 1.4.5 del texto. Conclusiones acerca de la convergencia. Limitaciones del cálculo.

CAPITULO 2.- ORGANIZACION GENERAL DE UN PROGRAMA DE ELEMENTOS FINITOS

2.1.- INTRODUCCION

La resolución de un problema técnico lineal y estático mediante el MEF se suele llevar a cabo de acuerdo con las siguientes etapas:

- 1.- Definición de la ecuación diferencial y condiciones de contorno.
- 2.- Discretización del dominio (estructura) mediante elementos y nudos.
- 3.- Elección del tipo de aproximación, es decir, de las funciones (polinómicas) que describen la función de campo dentro de cada elemento. (Funciones de forma).
- 4.- Ecuaciones que proporciona el MEF para cada elemento. (Matrices de rigidez y vectores de fuerzas, etc.).
- 5.- Ensamblaje de las matrices y vectores de cada elemento para la formación del sistema.
- 6.- Resolución del sistema de ecuaciones lineales resultante.
- 7.- Definición de la matriz de resultados.
- 8.- Descripción adecuada de los resultados.

En este libro se concentra la atención a las etapas 4, 5, 6 y 7 del cálculo que son totalmente automáticas y por lo tanto fácilmente programables en un computador.

Si bien como se ha indicado con anterioridad el MEF constituye un procedimiento aplicable a distintos problemas técnicos, en los siguientes capítulos se utilizará a efectos de exposición un problema modelo suficientemente general, y

sin embargo simple, que permita comprobar las distintas fases de programación. El ejemplo modelo elegido corresponde a problemas regidos por la teoría de la Elasticidad Plana. Por ello, parece conveniente resumir brevemente en este capítulo sus fundamentos teóricos, para pasar a continuación a describir las distintas partes principales que deben constituir un programa de elementos finitos. Conviene señalar que si bien los distintos programas se describen teniendo presente el ejemplo modelo, en general, su aplicación a otros problemas es inmediata o supone un mínimo de reprogramación. Ello supone que el planteamiento de la programación se efectúa de un modo general y a veces, suponga una mayor elaboración, que si se plantease para la resolución de los problemas específicos (C°) de elasticidad bidimensional.

2.2.- DESCRIPCION DEL PROBLEMA MODELO. ELASTICIDAD BIDIMENSIONAL

Sea un sólido elástico A , limitado por un contorno \bar{A} . En el dominio A actúan unas fuerzas másicas distribuidas \underline{b} y en una parte \bar{A}_1 de la frontera, unas acciones $q = q(s)$ se pueden expresar en función de la longitud s de arco de la frontera. El material del sólido está caracterizado por unas propiedades elásticas (módulos elásticos longitudinal, transversal, etc) que pueden variar de un punto a otro del dominio, es decir, el material se supone, en general, no homogéneo ni isotrópo. Finalmente, el sólido está sustentado en la restante porción de su contorno, \bar{A}_2 , o en otros términos, en esos puntos del contorno se especifican los movimientos (figura 2.1).

En esta situación cualquier punto del sólido experimentará un movimiento, definido por un vector $\underline{\mu}$ de componentes u y v . El campo de estos desplazamientos

tos $u(x,y)$ y $v(x,y)$, constituyen las funciones a determinar en el problema de contorno que se plantea a continuación, en su formulación de equilibrio:

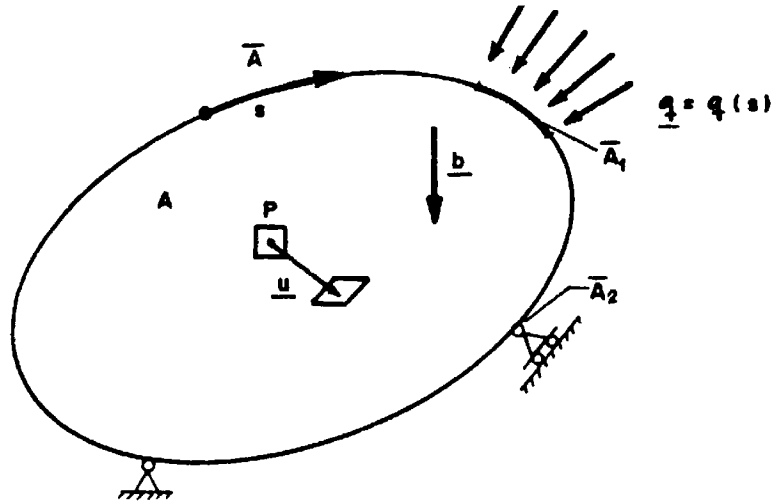


FIG.2.1.-SOLIDO ELASTICO BIDIMENSIONAL

Estos desplazamientos provocarán -salvo movimientos de sólido rígido- unas deformaciones. El estado de deformaciones en un punto genérico P , se caracteriza por el tensor de deformaciones que se puede representar en forma vectorial como sigue:

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

en donde los dos primeros componentes representan las elongaciones de las direcciones paralelas a los ejes (ver figura 2.2) y γ_{xy} constituye la distorsión que sufren estas direcciones.

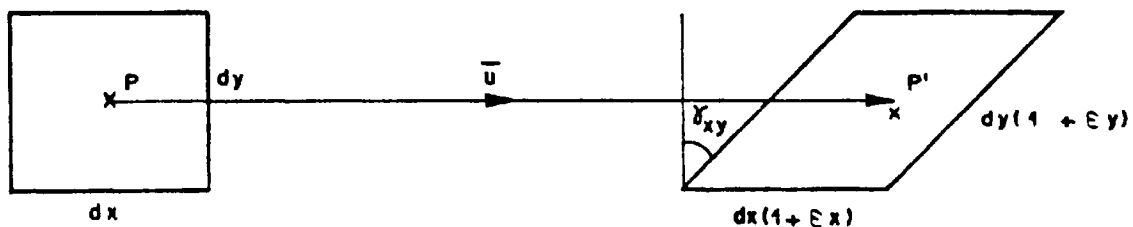


FIG.2.2 .- ESTADO DE DEFORMACION EN UN PUNTO

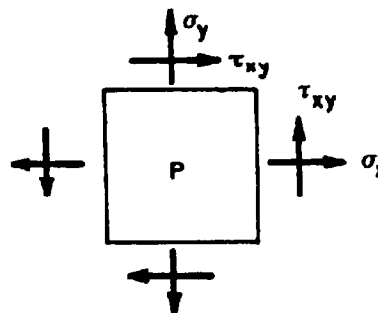
La relación entre el campo de deformaciones y el de desplazamientos viene dada por las siguientes expresiones:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad [2.1]$$

que matricialmente se pueden escribir como sigue:

$$\begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \longrightarrow \boxed{\underline{\epsilon} = \underline{L} \cdot \underline{u}} \quad [2.2]$$

Así mismo el punto genérico $P(x,y)$ está sometido a un estado tensional como el indicado en la figura 2.3, el cual se define mediante el tensor de tensiones que se puede representar mediante el vector:



$$\underline{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad [2.3]$$

FIG.2.3.- ESTADO TENSIONAL EN UN PUNTO

Las ecuaciones constitutivas del material que relacionan el estado de tensiones con el de deformaciones, para el caso de tensión plana e isotropía son:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \quad [2.4]$$

o en su forma más compacta

$$\boxed{\underline{\sigma} = \underline{D} \cdot \underline{\epsilon}} \quad [2.5]$$

En el caso de deformación plana las ecuaciones constitutivas indicadas para tensión plana siguen siendo válidas cambiando únicamente el módulo de elasticidad y el coeficiente de Poisson como se indica a continuación:

$$E' = \frac{E}{1-\nu^2} \quad \nu' = \frac{\nu}{1-\nu} \quad [2.6]$$

La energía potencial total del sólido viene dada por la expresión:

$$V(u) = \int_A \frac{1}{2} \underline{\epsilon}^T \underline{\sigma} dA - \int_A \underline{u}^T \cdot \underline{b} dA - \int_{A_1} \underline{u}^T \cdot \underline{q} ds \quad [2.7]$$

que en virtud de las relaciones anteriores puede expresarse sólo en función de los desplazamientos :

$$V(u) = \int_A \frac{1}{2} \underline{u}^T \underline{L}^T \underline{D} \underline{L} \underline{u} dA - \int_A \underline{u}^T \cdot \underline{b} dA - \int_{A_1} \underline{u}^T \underline{q} ds \quad [2.8]$$

La solución ($u = \underline{u}_{exacta}$) del problema elástico coincide con la que minimiza la energía potencial total. Se comprueba que aplicando las técnicas variacionales (fórmulas de Euler) resulta que u deberá satisfacer la ecuación diferencial vectorial:

$$\boxed{(\underline{L}^T \underline{D} \underline{L}) \underline{u} = \underline{b}} \quad [2.9]$$

que representa la ecuación de equilibrio interno en desplazamientos, del sólido elástico.

Así mismo resultan unas condiciones de contorno que deben de ser satisfechas por la solución u(x,y) y que en general, para un dominio irregular compli

ca extraordinariamente la obtención analítica de esta solución. El método de los elementos finitos constituye una herramienta adecuada en la resolución de estos problemas de contorno.

2.3.- APLICACION DEL MEF

Se comienza discretizando convenientemente el dominio A en un conjunto de subdominios finitos A_e (Figura 2.4a)

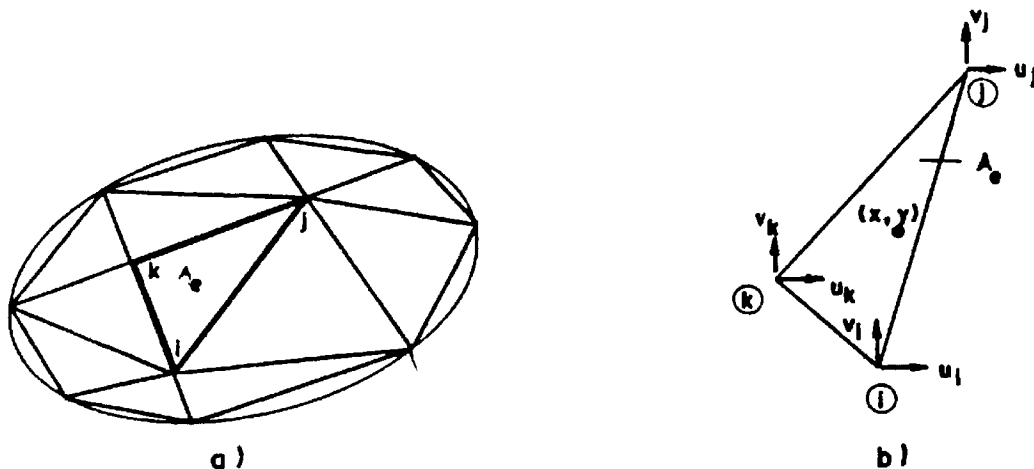


FIG.2.4

Una vez definida geométrica y topológicamente la malla de elementos finitos, el paso siguiente -y fundamental en el método- es la consideración de los valores de los desplazamientos de los nudos de dicha malla, como conjunto discreto de incógnitas a determinar. Para realizar la discretización anterior es necesario previamente definir los desplazamientos en cualquier punto (x, y) del elemento A_e interpolándolos en función de los desplazamientos en los nudos o incógnitas básicas.

Surgen así las funciones de forma o de interpolación $N_i(x, y)$ que en general se suponen polinómicas de un grado tal, que sea concordante con el número de grados de libertad (gdl) básicos que se consideran en el elemento. (Por consideracio

nes de convergencia estos polinomios deben incluir el completo de grado uno).

Es decir:

$$\underline{\underline{u}}(x, y) = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_i(x, y) & 0 & N_j & 0 & N_k & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_k \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{Bmatrix} \quad \text{con } x, y \in A_e$$

o en forma compacta $\underline{\underline{u}} = \underline{\underline{N}} \cdot \underline{\underline{U}} \quad [2.10]$

almacenando en el vector $\underline{\underline{U}}$ el conjunto discreto de los gdl a determinar.

Expresando las deformaciones en función de estas incógnitas según (2.2) y (2.10), resulta:

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \underline{\underline{L}} \cdot \underline{\underline{u}} = \underline{\underline{L}} \cdot \underline{\underline{N}} \underline{\underline{U}} = \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{U}} \quad [2.11]$$

con

$$\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{L}} \cdot \underline{\underline{N}} \quad [2.12]$$

y las tensiones serán:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{D}} \underline{\underline{\epsilon}} = \underline{\underline{D}} \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{U}} \quad [2.13]$$

La energía potencial total del sistema será ahora en función del sistema discreto ($\underline{\underline{U}}$) sustituyendo en (2.8):

$$V(\underline{U}) = \sum_{e=1}^{NEL} \left[\int_{A_e} \frac{1}{2} \underline{U}^T \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} \underline{U} dA_e - \int_{A_e} \underline{U}^T \cdot \underline{N}^T \underline{b} dA_e - \int_{A_{e_1}} \underline{U}^T \cdot \underline{N}^T \underline{q} ds_e \right] - \underline{U}^T \cdot \underline{F}_c \quad [2.14]$$

expresión en la que se ha incluido el trabajo de las fuerzas concentradas directamente aplicadas en los nudos y que no se consideraron en la expresión (2.8).

La condición de mínimo de (2.14) implica:

$$\frac{\partial V(\underline{U})}{\partial \underline{U}} = 0$$

de donde resulta la relación lineal:

$$\underbrace{\left[\sum_{e=1}^{NEL} \underbrace{\int_{A_e} \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} dA_e}_{\underline{k}^e} \right]}_{\underline{K} = \sum \underline{k}^e} \cdot \underline{U} = \underbrace{\sum_{e=1}^{NEL} \left[\underbrace{\int_{A_e} \underline{N}^T \underline{b} dA_e}_{\underline{f}_b^e} + \underbrace{\int_{A_{e_1}} \underline{N}^T \cdot \underline{q} \cdot ds_e}_{\underline{f}_q^e} \right]}_{\underline{F} = \underline{F}_c + \sum_{e=1}^{NEL} (\underline{f}_b^e + \underline{f}_q^e)} + \underline{F}_c \quad [2.15]$$

que se puede representar en la forma compacta

$$\boxed{\underline{K} \cdot \underline{U} = \underline{F}} \quad [2.16]$$

donde \underline{K} es la matriz de rigidez global del sistema y que del primer miembro de (2.15) se ve que resulta de la suma booleana o ensamblaje de todas las matrices de rigidez elementales:

$$\underline{k}^e = \int_{A_e} \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} dA_e$$

\underline{U} es el vector que contiene todos los gdl del sistema, cuyos valores se de sean determinar.

\underline{F} es un vector cuyas componentes representan las fuerzas en los nudos, eficaces con las componentes del vector \underline{U} . A este vector contribuyen las fuerzas concentradas \underline{F}_c en los nudos y las fuerzas equivalentes en los nudos a las fuerzas másicas (\underline{p}_b^e) y de superficie (\underline{p}_q^e) correspondientes a todos los elementos de la estructura como se indica en el segundo miembro de (2.15).

El sistema de ecuaciones lineales (2.16) es la traducción para el sistema discreto \underline{U} , del sistema de ecuaciones diferenciales (2.9) planteado en el campo de desplazamientos \underline{u} .

Una vez planteado el sistema (2.16) se introducen las condiciones esenciales de contorno, modificando convenientemente dicho sistema.

La consideración de las condiciones esenciales o cinemáticas de contorno puede efectuarse como sigue:

Sea el sistema:

$$\underline{K} \cdot \underline{U} = \underline{F}$$

y las condiciones de contorno esenciales en los gdl "a":

$$\underline{U}_a = \bar{\underline{U}}_a \quad (\text{valor especificado})$$

Particionando el sistema anterior en los gdl "a" y los restantes "b" se escribe:

$$\begin{bmatrix} \underline{K}_{aa} & \underline{K}_{ab} \\ \underline{K}_{ba} & \underline{K}_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\underline{U}}_a \\ \underline{U}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{F}_a \\ \underline{F}_b \end{bmatrix} \quad [2.17]$$

Evidentemente los valores de \underline{F}_a (reacciones) no son conocidos (incógnitas) puesto que en esos grados de libertad se especifican los movimientos.

Eliminando los gdl "a" se deduce el sistema

$$\underline{k}_{bb} \underline{U}_b = \underline{F}_b - \underline{k}_{ba} \cdot \underline{\bar{U}}_a \quad [2.18]$$

y las reacciones incógnitas son, una vez resuelto el sistema anterior:

$$\underline{F}_a = \underline{k}_{aa} \underline{\bar{U}}_a + \underline{k}_{ab} \cdot \underline{U}_b \quad [2.19]$$

El procedimiento que se acaba de indicar no es adecuado para programación en computador ya que supone una modificación de la dimensión de las matrices y reordenación de coeficientes. Existen otras técnicas de introducción de las condiciones esenciales que evitan que estos inconvenientes y que se comentarán mas adelante. En cualquier caso el sistema (2.16) se modifica en el siguiente:

$$\underline{\bar{K}} \cdot \underline{\bar{U}} = \underline{\bar{F}} \quad [2.18]$$

con $\underline{\bar{K}}$ la matriz modificada por las condiciones esenciales de contorno. Este sistema se resuelve para obtener el vector de desplazamientos buscado $\underline{\bar{U}}$. Finalmente, a partir de estos desplazamientos se deducen los valores de las incógnitas secundarias como son las deformaciones, tensiones, etc. de interés en el cálculo.

2.4.- ORGANIGRAMA GENERAL EN UN PROGRAMA

La elaboración del sistema:

$$\boxed{\underline{K} \cdot \underline{U} = \underline{F}}$$

[2.19]

constituye el núcleo principal de un programa de elementos finitos planteado en desplazamientos.

El cálculo de la matriz de rigidez global \underline{K} , así como del vector global de fuerzas en nudos \underline{F} implica una operación de ensamblaje o suma booleana de las matrices de rigidez elementales y de las fuerzas generadas en los nudos de cada elemento:

$$\begin{aligned} \underline{K} &= \sum_{e=1}^{n_{el}} \underline{K}^e \\ \underline{F} &= \underline{F}_c + \sum_{e=1}^{n_{el}} \underline{f}_b^e + \sum_{e=1}^{n_{el}} \underline{f}_q^e \end{aligned}$$

Ahora bien, previamente al ensamblaje se deben calcular las matrices y vectores elementales:

$$\begin{aligned} \underline{K}^e &= \int_{A_e} \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} dA_e \\ \underline{f}^e &= \int_{A_e} \underline{N}^T \underline{f} dA_e + \int_{A_{e1}} \underline{N}^T \cdot \underline{q} ds_e \end{aligned}$$

Se comprueba que una vez definidas las funciones \underline{N} de interpolación, las operaciones anteriores representan etapas automáticas. Formado el sistema $\underline{K}\underline{U}=\underline{F}$ y una vez impuestas las condiciones de borde, se resuelve mediante técnicas numéricas apropiadas obteniendo el vector desplazamiento \underline{U} .

Finalmente en un proceso de resustitución realizada a lo largo de todos los elementos, se obtendrán las deformaciones y tensiones que se producen en los nudos (u otros puntos) de los elementos:

$$\begin{aligned} \underline{\varepsilon} &= \underline{B} \cdot \underline{U} \\ \underline{\sigma} &= \underline{D} \underline{B} \cdot \underline{U} \end{aligned}$$

Para minimizar el problema de la integración (el cual se estudia en detalle más adelante) se eligen elementos finitos en los que se suponen variación lineal de los desplazamientos, esto es, la relación $\underline{u} = \underline{N}(x,y) \cdot \underline{U}$ es lineal.

Equivalentemente las funciones de forma $N(x,y)$ serán polinomios de primer grado, lo que implica que los vectores deformación y tensión son constantes dentro de cada elemento. Por lo tanto la integración de la rigidez elemental y de las fuerzas equivalentes en los nudos, resulta de forma inmediata y directa, sin necesidad de acudir a rutinas de integración numérica en el programa.

Con objeto de simplificar al máximo el programa de computador solo se consideran fuerzas concentradas en los nudos $\underline{F} = \underline{F}_c$, por lo que será el usuario del programa el que calcule e introduzca las fuerzas equivalentes en los nudos (\underline{f}_b^e y \underline{f}_q^e) como si estuvieran concentradas en ellos.

A estos efectos el cálculo de estas fuerzas resulta inmediato para los casos más utilizados en la práctica; el reparto isostático que se utiliza puede verse en la figura 2.5.

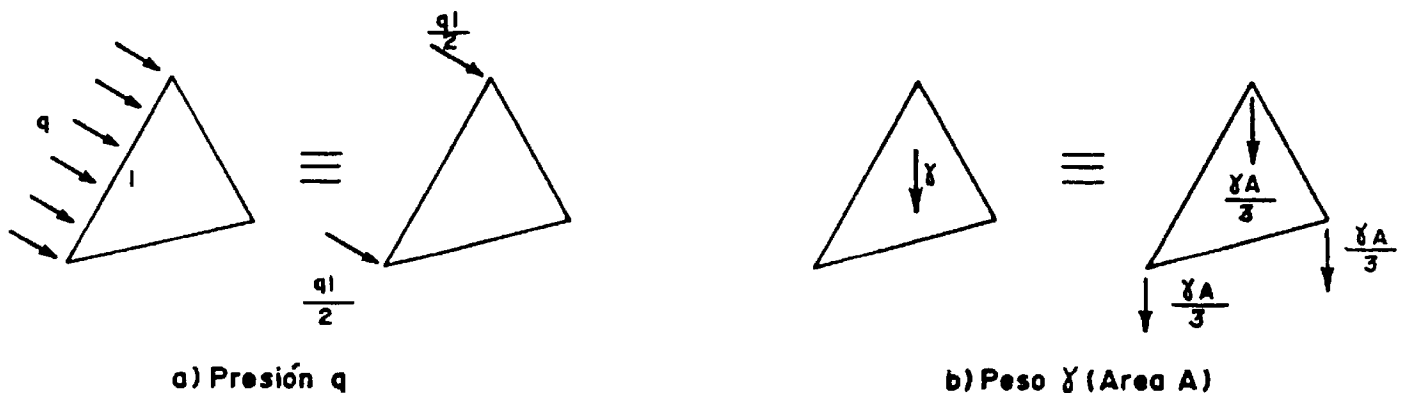
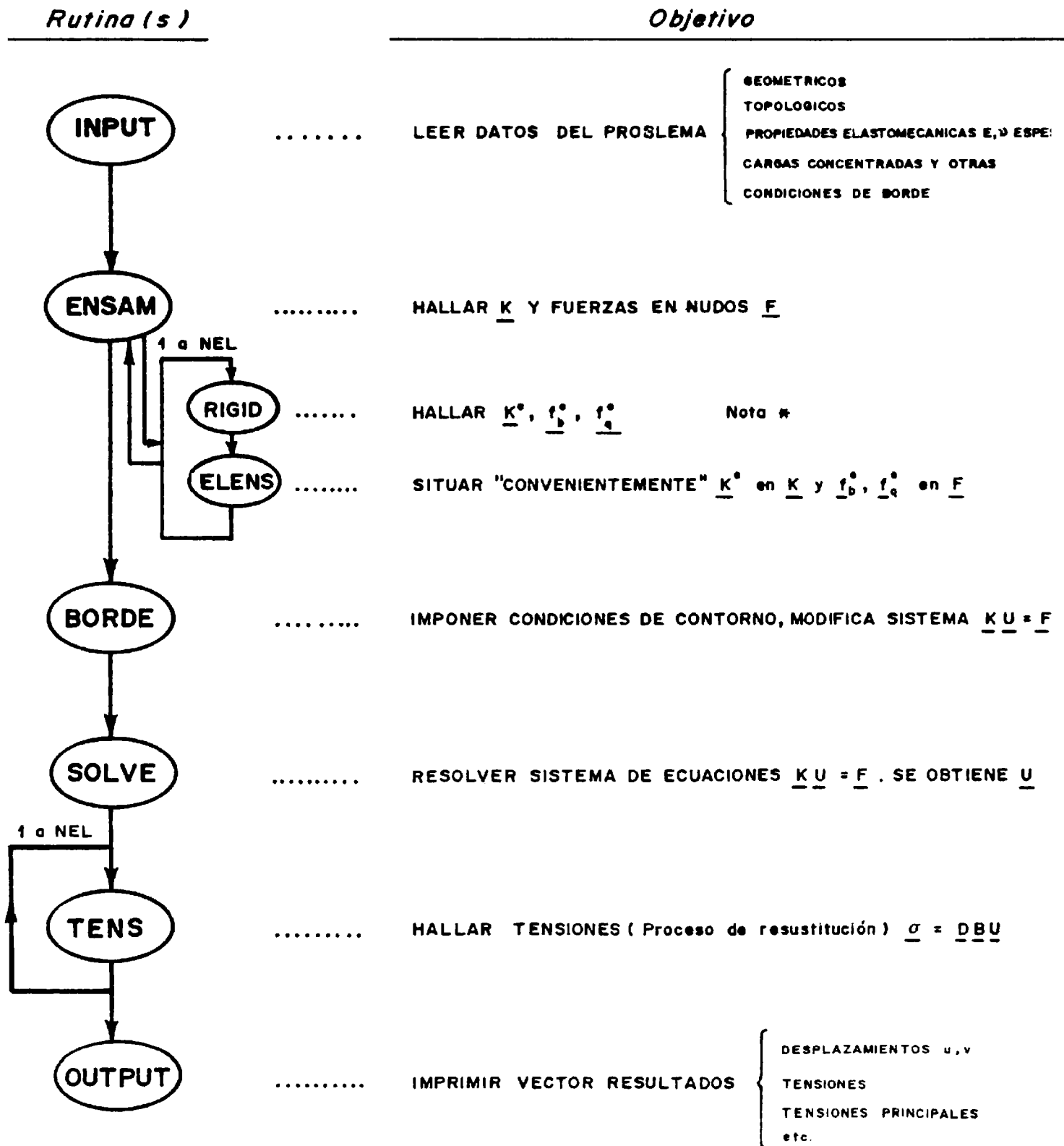


FIG. 2.5.- FUERZAS EQUIVALENTES EN LOS NUDOS

El organigrama general del programa de elementos finitos, que se va a desarrollar, puede ser resumido como sigue:



ORGANIGRAMA GENERAL

NOTA (*) LAS MATRICES Y VECTORES ELEMENTALES \underline{K}^e y $\underline{f}_b^e, \underline{f}_a^e$ IMPLICAN EN GENERAL UN PROCESO DE DEFINICION PREVIA DE LAS FUNCIONES DE FORMA E INTEGRACION POSTERIOR

2.5.- DESCRIPCION Y ORGANIZACION DE LAS VARIABLES UTILIZADAS EN EL PROGRAMA

En la realización de un programa de computador es fundamental la consideración, además de la organización de las operaciones a realizar en el programa -es decir, diseño de diagramas de flujo lógico como los indicados en 2.4- una descripción adecuada y racional de las principales variables que intervienen - en el proceso de cálculo.

En principio, la nomenclatura de las variables debe ser nemotécnica, que no exiga cada vez que se utilicen la traducción en un diccionario. Lenguajes de alto nivel como FORTRAN, PASCAL e incluso algunos BASIC avanzados permiten la utilización de varias letras. Se adopta en principio, cuatroletras, para de signar las distintas variables y a modo de ejemplo de nomenclatura adecuada se citan las siguientes variables:

NMAT = número de diferentes materiales.

PROP() = vector de propiedades del material.

NNE = número de nudos por elemento.

NGLN = número de grados de libertad por nudo.

A veces es útil utilizar prefijos determinados con una significación espe cífica. Por ejemplo:

M expresa el valor máximo de una variable.

N expresa el valor dado como dato.

K expresa un contador.

I, J, L representan variables mudas dentro de un lazo (sentencia DO en FORTRAN).

Por ejemplo:

NBAN = ancho de banda para el caso que se estudia.

MBAN = máximo ancho de banda previsto en el programa.

KBAN = valor de ancho de banda en un acumulador o contador.

IBAND = índice de un caso para indicar que representa distintos anchos de banda.

En la tabla 2.1 se muestra una descripción de las principales variables que se utilizan en el programa.

TABLA 2.1

SIGNIFICADO DE LAS PRINCIPALES VARIABLES ENTERAS UTILIZADAS

NN	= Número de Nudos
NE	= Número de Elementos
NNC	= Número de Nudos Cargados
NNB	= Número de Nudos de Borde
NNE	= Número de Nudos por Elemento
NGLN	= Número de Grados de Libertad por Nudo
NGLE	= Número de Grados de Libertad por Elemento = $NGLN * NNE$
MGDL	= Dimensión de las filas de la matriz RIG donde se almacena la matriz de rigidez global (máximo)
MBAN	= Dimensión de las columnas de RIG (máximo)
NGDL	= Número total de incógnitas = $NGLN * NN$, es también igual al número real de filas de la matriz de rigidez
NBAN	= Semiancho de banda de la matriz de rigidez

SIGNIFICADO DE LAS PRINCIPALES VARIABLES REALES UTILIZADAS

E = Módulo de elasticidad

SIGNIFICADO DE LAS MATRICES ENTERAS UTILIZADAS

CON = Vector (3) de conectividad del elemento
CON($NNE * (L-1) + 1$) contiene el primer nudo,
CON($NNE * (L-1) + 2$) el segundo nudo, y,
CON($NNE * (L-1) + 3$) el tercer nudo del elemento

IB = Vector de las condiciones de borde
 IB(NGLN+1)*(J-1)+1 es el número del nudo de borde J
 IB(NGLN+1)*(J-1)+2 indica el estado de la componente X, del desplazamiento del nudo de borde J
 IB(NGLN+1)*(J-1)+3 indica el estado de la componente Y, del desplazamiento del nudo de borde J

SIGNIFICADO DE LAS MATRICES REALES UTILIZADAS

X = Vector de abscisas. X(J) es la abscisa del nudo J
 Y = Vector de ordenadas. Y(J) es la ordenada del nudo J
 PROP = PROP(L) es el espesor del elemento L
 VC = Vector de cargas nodales
 VC(NGLN*(J-1)+1) es la componente X de la carga en el nudo J
 VC(NGLN*(J-1)+2) es la componente Y de la carga en el nudo J
 Tendrán valores cero para nudos no cargados
 Después de la resolución del sistema de ecuaciones,
 VC es utilizado para almacenar los desplazamientos nodales,
 de esta forma
 VC(NGLN*(J-1)+1) contiene la componente X
 VC(NGLN*(J-1)+2) contiene la componente Y del desplazamiento del nudo J
 RIG = Matriz bidimensional de rigidez. Almacenaje bandeado y simétrico. NGDL es el número de filas, NBAN es el número de columnas
 RIGEL = Matriz bidimensional de rigidez elemental. El número de filas y columnas es NGLN
 V = Vector auxiliar para la solución del sistema.
 Su dimensión es NBAN
 FORC = Tensiones en el CDG del elemento L
 FORC(3+(L-1)+1) con L=1,2,3 almacena las tensiones SIGMAX, SIGMAY, TAUXY, respectivamente, para el elemento L
 REAC = Vector que inicialmente contiene los desplazamientos impuestos en los nudos de borde
 REAC(NGLN*(J-1)+1) contiene la componente X del desplazamiento del nudo J impuesto
 REAC(NGLN*(J-1)+2) contiene la componente Y del desplazamiento del nudo J impuesto
 Esta matriz contendrá ceros para los nudos sin desplazamientos impuestos
 Más tarde almacenará las tensiones promediadas en los nudos siendo, REAC(NGLN*(J-1)+1) para L=1,2,3 contiene las tensiones promediadas SIGMAX, SIGMAY, TAUXY, para el nudo J
 NODES = NODES(J) contiene el número de elementos incidentes en el nudo J

Para una mejor comprensión del significado de las variables, se de finen para el ejemplo que se indica en la figura 2.6, Este ejemplo se si gue a lo largo del libro con objeto de aclarar de forma práctica las dis tintas operaciones que realiza el programa.

La estructura de este ejemplo tiene 7 nudos (NN=7) y está discreti-
zada en 5 elementos (NE=5); los resultados del programa no serán muy ade-
cuados dada la sencilla discretización realizada. Actua una carga verti-
cal de 100t en el nudo 3 y las condiciones de contorno cinemáticas son
las indicadas en la figura 2.6 para los nudos 1, 6 y 7. Asimismo se im-
pone para el nudo 1 un desplazamiento horizontal de 0.001 m.

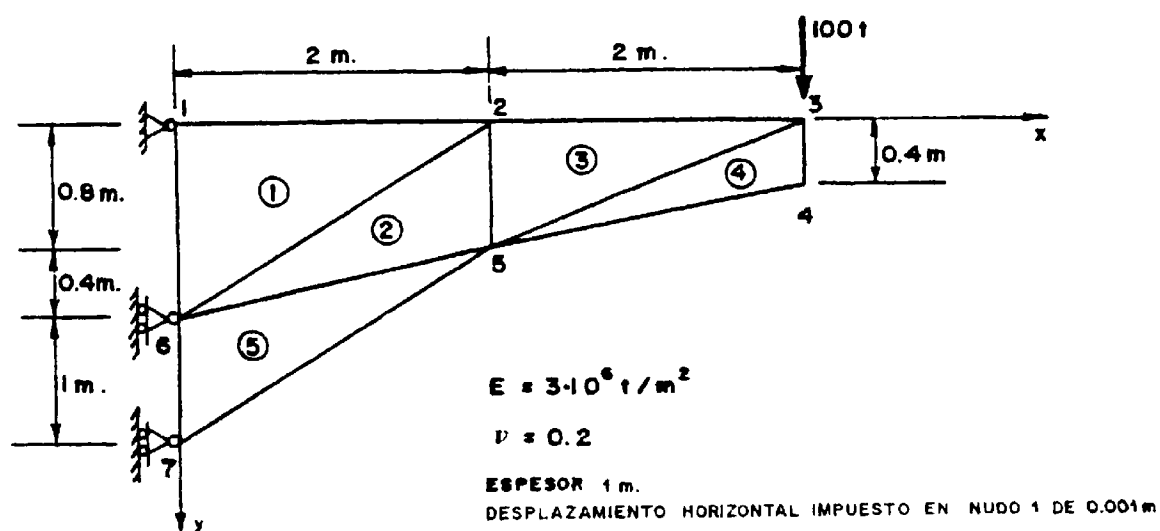


FIG. 2. 6

Los valores de las variables anteriores en este caso son:

$$NN = 7, \quad NE = 5, \quad NNC = 1, \quad NNB = 3, \quad NNE = 3, \quad NGLN = 2$$

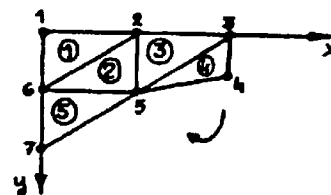
MGDL = Máximo número de grados de libertad (se programará = 100)

MBAN = Máximo semiancho de banda (se programará = 40)

$$NGDL = 2 * 7 = 14 \quad (u_1, v_1, u_2, \dots, u_7, v_7)$$

$$NBAN = ((6-1)+1) \times 2 = 12$$

$$E = 3.000.000 \text{ t/m}^2,$$



CONECTIVIDAD	CON(1)=6	CON(2)=1	CON(3)=2	Nudos del primer elemento.
	CON(4)=2	CON(5)=5	CON(6)=6	Nudos del segundo elemento.
	CON(7)=5	CON(8)=2	CON(9)=3	Nudos del tercer elemento.
	CON(10)=3	CON(11)=4	CON(12)=5	Nudos del cuarto elemento.
	CON(13)=7	CON(14)=6	CON(15)=5	Nudos del quinto elemento.

La numeración de los elementos será recorriendo los nudos en el sentido del eje positivo "x" al positivo de las "y"

CONDICIONES DE BORDES	Nº DEL NUDO	INDICADOR DEL ESTADO DE LAS COMPONENTES DE LOS DESPLA- ZAMIENTOS = 0 Libre; 1 impuesto		VALOR DE LOS DESPLAZAMIENTOS IMPUESTOS	
		COMPONENTE U	COMPONENTE V	U	V
	IB(1)=1	IB(2)=1	IB(3)=1	REAC(1)=0.001	REAC(2)=0
	IB(4)=6	IB(5)=1	IB(6)=0	REAC(11)=0.	REAC(12)=—
	IB(7)=7	IB(8)=1	IB(9)=0	REAC(13)=0.	REAC(14)=—

El resto de los valores REAC no definidos aquí, tomará valores nulos.

Las coordenadas de los nudos serán:

$$x(1)=0 \quad x(2)=2 \quad x(3)=4 \quad x(4)=4 \quad x(5)=2 \quad x(6)=0 \quad x(7)=0$$

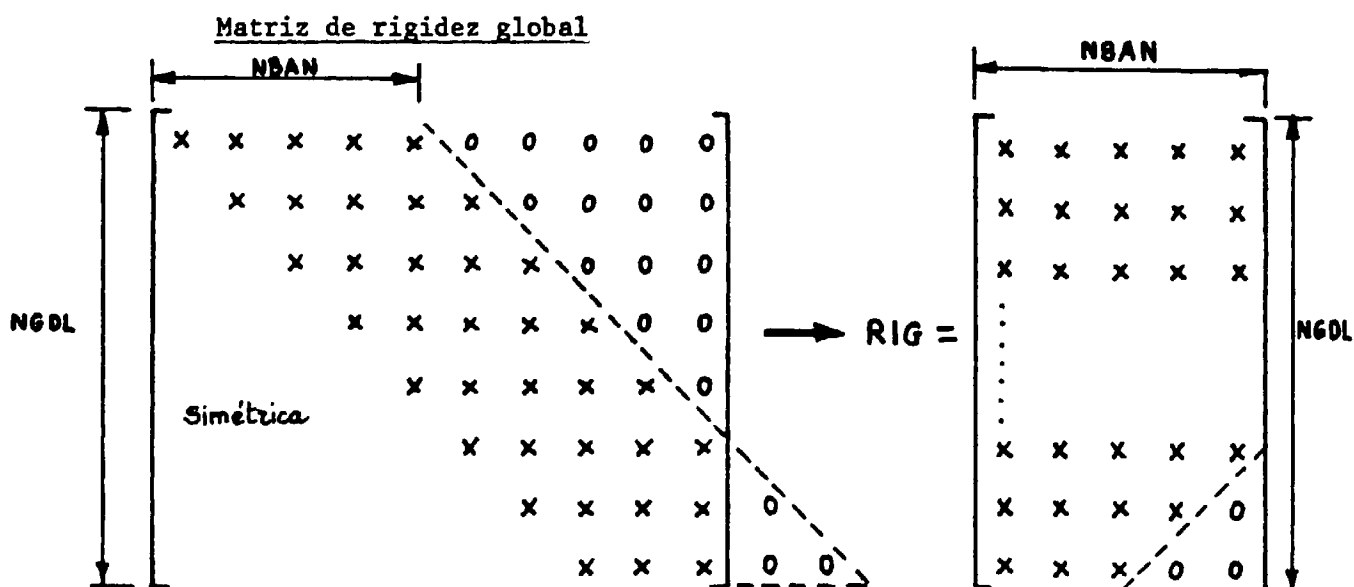
$$y(1)=0 \quad y(2)=0 \quad y(3)=0 \quad y(4)=0.4 \quad y(5)=0.8 \quad y(6)=1.2 \quad y(7)=2$$

El espesor de todos los elementos será en este caso el mismo e igual a 1 metro.

$$PROP(1) = PROP(2) = \dots = PROP(5) = 1$$

-Vector de cargas nodales VC(1), VC(2),, VC(14).

La única componente no nula es la correspondiente a la vertical en el nudo 3, es decir VC(6) = 100.



Matriz de rigidez elemental

RIGEL = (6x6) correspondientes a los 6 gdl $u_i, v_i, u_j, v_j, u_k, v_k$ del elemento.

Tensiones de c.d.g. del elemento

FORC(1) = σ_{x1} FORC(2) = σ_{y1} FORC(3) = τ_{xy1} en cdg elemento 1
 FORC(4) = σ_{x2} FORC(5) = σ_{y2} FORC(6) = τ_{xy2} en cdg elemento 2
 \vdots \vdots \vdots \vdots
 FORC(13) = σ_{x5} FORC(14) = σ_{y5} FORC(15) = τ_{xy5} en cdg elemento 5




Tensiones promediadas en los nudos

REAC(1) = σ_{x1} REAC(2) = σ_{y1} REAC(3) = τ_{xy1} tensiones medias en nudo 1
 REAC(4) = σ_{x2} REAC(5) = σ_{y2} REAC(6) = τ_{xy2} tensiones medias en nudo 2
 \vdots \vdots \vdots \vdots
 REAC(19) = σ_{x7} REAC(20) = σ_{y7} REAC(21) = τ_{xy7} tensiones medias en nudo 7

Número de elementos incidentes en cada uno de los 7 nudos

NODES(1) = 1 NODES(2) = 3 NODES(3) = 2 NODES(4) = 1
 NODES(5) = 4 NODES(6) = 3 NODES(7) = 1

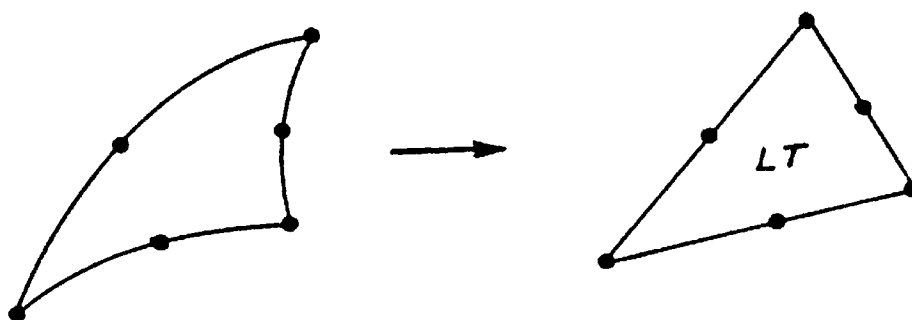
El traspaso de variables de unas rutinas a otras dentro del programa de computador, se realiza a través de la lista de argumentos de las sentencias de llamada (CALL). En la mayoría de las aplicaciones "industriales" este trasiego resulta más cómodo a través de sentencias COMMON, así por ejemplo mediante el COMMON/MALLA/X(NN), Y(NN), CON(NEL) en el que se sitúan las coordenadas y topología, se resume la transferencia de todos los datos referentes a la malla en que se discretiza la estructura.

Ahora bien, por motivos didácticos, el trasiego se hará a través de la lista de argumentos, indicando con una flecha  los parámetros de entrada y con  los de salida, y con  los que entran y salen modificados. De esta forma se indica, cuales son las variables que se desean hallar en la rutina en cuestión y cuales son los datos que se necesitan para su determinación.

Se inserta, sin embargo, una sentencia COMMON, sin nombre, en la que se incluyen las variables utilizadas en la mayoría de las rutinas del programa.

CAPITULO 2.- EJERCICIOS

2.1. Desarrollar el organigrama indicado en la página, para el caso de utilizar elementos isoparamétricos del tipo LT como se indica en la figura:



En este caso se sugiere la utilización de una rutina "SHAPE" que calcule las funciones de forma y de sus derivadas, en los puntos de Gauss que se consideren. Esta rutina debería calcular también el jacobiano de la transformación del triángulo curvilíneo al rectilíneo ó "padre".

El proceso de integración numérica que en este caso es necesario, se deberá realizar dentro de la subrutina RIGEL.

Las coordenadas de los puntos de integración y los pesos correspondientes se pueden incluir en un BLOCK-DATA, si bien en este caso estos valores se pueden asignar directamente en la rutina RIGEL pues con 3 puntos de integración, es suficiente.

2.2. Extender al caso 2D el problema de la transmisión de calor analiza
do para el caso monodimensional en el Capítulo 1 (Ejemplo 1.4.5).

Se indicará el diagrama general de flujo, para resolver este problema mediante el MEF, utilizando el elemento triangular de 3 nu
dos. Así mismo se establecerá el paralelismo entre las etapas a se
guir en este organigrama y en el dado para el caso de tensión pla
na.

CAPITULO 3.- DESCRIPCION DEL PROGRAMA PRINCIPAL

3.1.- DIMENSIONAMIENTO DE LAS VARIABLES

Una vez definidos el significado y la organización de la nomenclatura de las principales variables que van a entrar en juego durante el desarrollo del programa, se está ya en condiciones de codificar en lenguaje FORTRAN la parte principal del mismo (listado 3.1).

Este programa comienza agrupando los parámetros que van a ser utilizados en la mayoría de las subrutinas, en un área común de memoria (sentencia COMMON).

A continuación se incluye la sentencia de dimensionamiento de las variables (DIMENSION), que desde el punto de vista de su codificación no necesita comentarios especiales, salvo el hecho de ser en el programa principal donde deben de expresarse las dimensiones reales. En las subrutinas éstas variables "comunes" a la principal (a través del COMMON o de los argumentos de llamada de las rutinas) no necesitan ser dimensionadas con los valores reales por lo que es mas simple y evita errores escribir:

```
DIMENSION X(1), Y(1) ó X(*), Y(*)
```

De esta forma el dimensionamiento de estas variables viene controlado por el programa principal.

Es importante observar que el dimensionamiento correcto de las variables, es una tarea fundamental puesto que condiciona de forma decisiva la dimensión

máxima del sistema discreto que aquí se analiza.

Así como el número total de variables que se almacenan en memoria viene - condicionado por la capacidad del propio computador, la relación entre sus dimensiones ha de realizarse de forma coherente:

Así la relación entre el máximo número de nudos y elementos permitido dependerá del tipo de mallas que se vayan a utilizar. Por ejemplo si se utilizan triángulos de 3 nudos se observa en las figuras 3.1 a) y b) que ambas mallas tienen aproximadamente el mismo número de nudos que de elementos, por lo que se elige el mismo número (100).

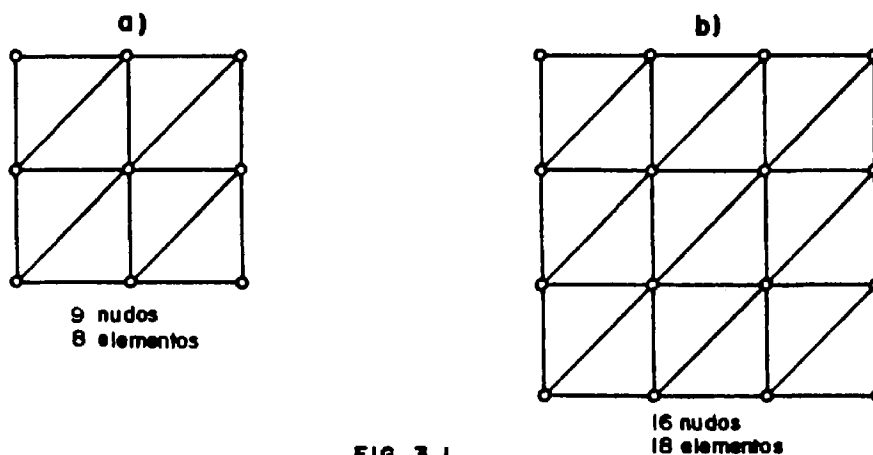


FIG. 3.1

Si se utilizasen elementos isoparamétricos de 8 nudos del tipo de la figura 3.2a) se comprueba que el número de nudos es del orden de 4 ó 5 veces el de elementos y por tanto habría que dimensionarlos en esta relación.

Ahora bien, si el programa se va a utilizar con mayor frecuencia para resolver problemas que requieren un cierto tipo de malla, habrá que dimensionarlas para dicha situación. Así, por ejemplo, la discretización de láminas gruesas de re

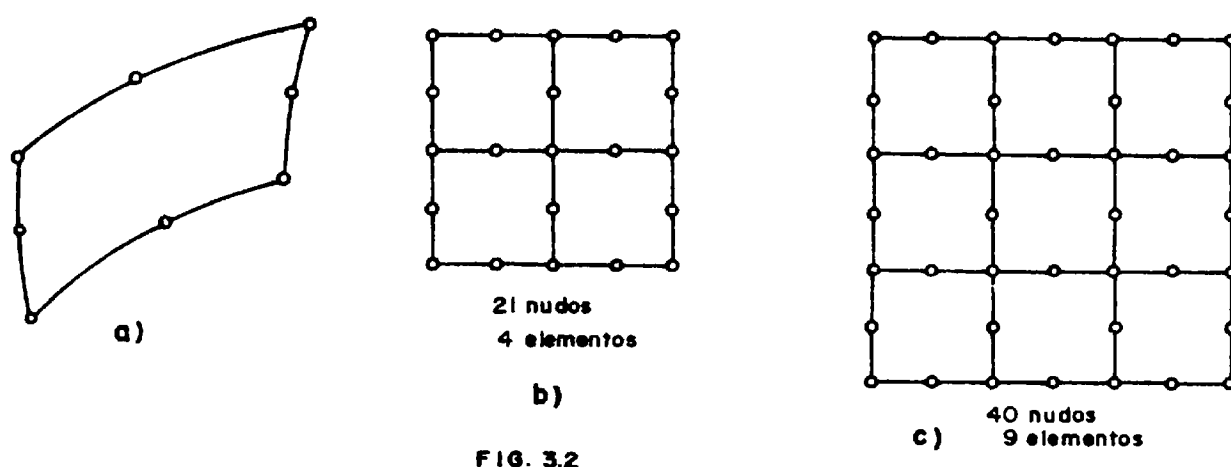


FIG. 3.2

volución mediante los elementos cuadráticos anteriores presenta la forma alarga da que se indica en la figura 3.3

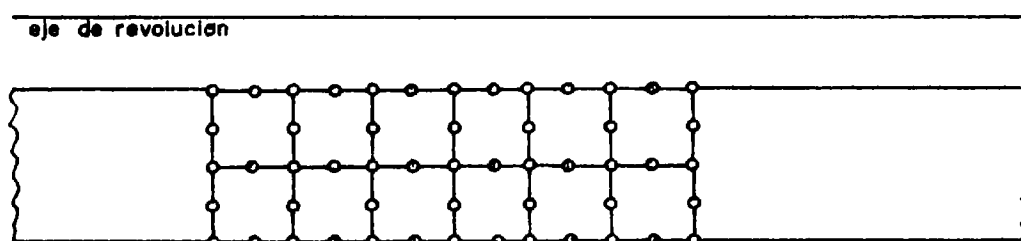


FIG. 3.3

en la que se observa que la relación número de nudos-número de elementos es 4 (dependiendo en general del número de elementos dispuestos a través del espesor de la pared). Por consiguiente dimensionar en estos casos para más elemen tos es desperdiciar área de memoria.

Existe una serie de variables que se dimensionarán conforme al número de nudos máximo permitido, tales como las coordenadas X(100), Y(100), VC(200) (2 componentes de carga por nudo), REAC(300) (3 tensiones por nudo), NODES(100). Otras estarán ligadas al máximo número de elementos estimado, tales como CON(300) que contiene los índices de los 3 nudos que definen cada elemento, PROP(100) re cogerá los 100 espesores de los 100 posibles elementos, FORC(300) almacenará las 3 componentes de la tensión constante en cada elemento.

El semiancho de banda es un parámetro que se debe limitar según el tipo de malla que se utilice, así como del máximo número de nudos y elementos permitidos. Así para nuestro programa un semiancho de banda de 40 (20 nudos ligados) parece adecuado a las otras dimensiones y será suficiente siempre que el usuario del programa numere los nudos convenientemente.

De la limitación de este último parámetro y del máximo número de nudos permitido (100 nudos ó 200 gdl) resulta que las dimensiones de la matriz de rigidez elemental simétrica y bandeada serán RIG(200,40).

En cuanto a los nudos en que se imponen condiciones de contorno, se considera 20 como máximo. Este número se estima que permite una gran gama de posibilidades de borde frente a los 100 nudos existentes como máximo, esto supone que IB(20,3).

Analizado el dimensionamiento de las variables principales, se detecta fácilmente que el almacenamiento de la matriz de rigidez equivale alrededor del 80% del total por lo que son el número de nudos y el ancho de banda precisamente los valores que hay que limitar con más rigurosidad para adaptarlos a la capacidad de memoria del computador.

En el caso que se analiza RIG(200,40) = 8.000 variables, es decir, del orden de unas 10.000 variables en juego, por lo que resulta una necesidad de memoria de:

$10.000 * 4 \text{ octetos} = 40.000 \text{ octetos} = 40 \text{ Kbytes}$, (se supondrán palabras de 8 octetos en el caso de utilizar doble precisión).

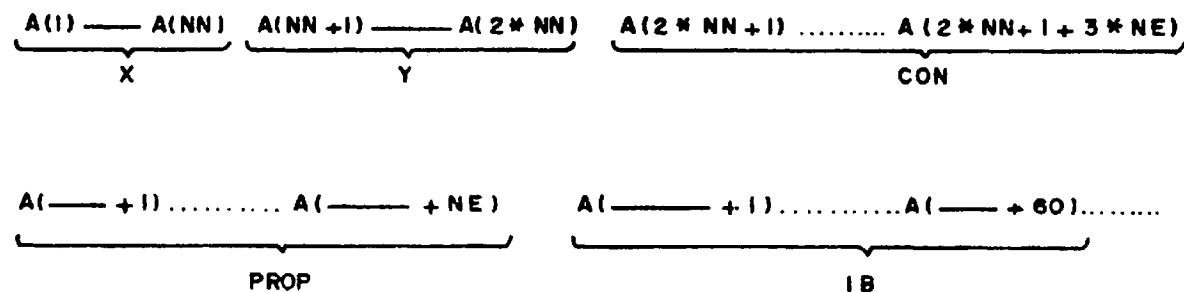
A estas posiciones de almacenamiento hay que añadir las propias ocupadas por las sentencias del programa y que utilizando un cálculo grosero resulta:

número de instrucciones * 10(num. de subinstrucciones internas) * 6 (debido al paso de FORTRAN a lenguaje Objeto) = x byts.

Estas pequeñas cuentas pueden servir a la hora de adquirir un computador para conocer el tamaño de los problemas de E.F. susceptibles de ser resueltos directamente por él.

Existen procedimientos de trabajo en memoria externa (Overlay, ect) que - amplían este tamaño o mejor que utilizan de manera óptima el mismo área de memoria.

Una técnica utilizada por Wilson (programa SAPIV, ADINA, etc) para optimizar el dimensionamiento de las variables, consiste en almacenarlas todas dentro de un único vector A(10.000) cuya dimensión está solamente limitada por la capacidad del ordenador, quedando las variables almacenadas secuencialmente a partir de unos direccionamientos, así en nuestro caso podría ser:



De esta manera no es preciso preocuparse de dimensionar separadamente cada variable.

No obstante la ventaja de este procedimiento, en este programa se adopta el procedimiento inicial considerado más claro a efectos didácticos

3.2.- PROGRAMA PRINCIPAL

Una vez comentada la importante etapa del dimensionamiento, sigue la de inicialización de parámetros y la asignación de ficheros de entrada y salida de datos. A continuación se describe brevemente el programa principal. (Ver lista do 3.1).

Tal como se ha concebido aquí, el programa principal se encarga únicamente de gestionar las distintas fases del MEF, llamando a cada una de las rutinas encargadas de ejecutar dichas tareas.

Así llama al principio a la rutina INPUT cuya misión es la de introducir en memoria los datos del problema, ya sean geométricos (X,Y), topológicos o de malla (CON). Propiedades elastomecánicas (PROP), cargas (VC) o datos del contorno (IB, REAC).

El paso siguiente es llamar a la subrutina ENSAM suministrándole los datos necesarios (X, Y, CON, PROP) para que calcule la matriz de rigidez de la estructura RIG y añada al vector de fuerzas concentradas VC las cargas equivalentes en los nudos, debidas a las fuerzas másicas y superficiales del elemento.

La matriz RIGEL sale en la lista de argumentos de la llamada a la rutina ENSAM con el único objeto de ser dimensionada en este programa principal.

Posteriormente se llama a la rutina BORDE donde las condiciones de contorno dadas por IB y REAC, se aplican modificando convenientemente las matrices de rigidez RIG y el vector de cargas VC.

En la rutina SOLVE se resuelve el sistema de ecuaciones donde los coeficientes son los elementos de la matriz RIG, los términos independientes son las cargas VC y los desplazamientos o incógnitas vuelven resueltos al programa principal precisamente en el antiguo vector de cargas VC.

El vector interno V de esta rutina, sale a la principal para cobrar dimensión la cual coincide con el semiancho de banda, y permite su fácil cambio si aquél fuera cambiado, manipulando solo el programa principal.

Una vez obtenidos los desplazamientos que constituyen las incógnitas básicas del problema, el programa llama a la rutina TENS para que en fase de restitución calcule las tensiones FORC, constantes en cada elemento, así como las promedidas en los nudos (REAC).

Finalmente en la rutina OUTPUT se dá salida a los resultados de interés.

PROGRAMA PRINCIPAL

COMMON MGD, MBAN, NGLE, NN, NE, NNC, NNB, NGLN, NNE, NGDL, NBAN, IN, IO, E, G
DIMENSION X(100), Y(100), CON(300), PROP(100), IB(60), RIG(200, 40),
*VC(200), FORC(300), REAC(300), RIGEL(6, 6), V(40), NODES(100)

-INICIALIZACION DE LOS PARAMETROS DEL PROGRAMA

MGDL = NUMERO DE FILAS DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ
MBAN = SEMIANCHO DE BANDA
NGLN = NUMERO DE GDL POR NUDO
NNE = NUMERO DE NUDOS POR ELEMENTO
NGLE = NUMERO DE GDL PARA UN ELEMENTO

MGDL=200
MBAN=40
NGLN=2
NNE=3
NGLE=NGLN*NNE

FICHEROS DE ENTRADA Y SALIDA

IN=5
IO=6

PASOS DEL PROGRAMA

-ENTRADA DE DATOS

CALL INPUT(X, Y, CON, PROP, VC, IB, REAC)

-ENSAMBLAJE DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ

CALL ENSAM(X, Y, CON, PROP, RIG, RIGEL, VC)

-INTRODUCCION DE LAS CONDICIONES DE BORDE

CALL BORDE(RIG, VC, REAC, IB)

-RESOLUCION DEL SISTEMA DE ECUACIONES

CALL SOLVE(RIG, VC, V, NGDL, NBAN, MGD, MBAN)

-CALCULO DE LAS TENSIONES

CALL TENS(CON, PROP, FORC, REAC, X, Y, VC, NODES)

-SALIDA DE RESULTADOS

CALL OUTPUT(VC, FORC, REAC)

END

CAPITULO 3.- EJERCICIOS

3.1. Si se realiza una modificación en las dimensiones de las variables de la Tabla 2.1, el programa que se desarrolla en este libro es directamente aplicable al caso tridimensional, salvo "detalles" de entrada de datos y salida de resultados.

Se pide redimensionar dichas variables.

El elemento finito tridimensional que se utilizará es el tetraedro simple (4 nudos):



3.2. Modificar el programa principal desarrollado en este capítulo de manera que se pueda analizar más de un caso de carga para cada ejecución del programa.

CAPITULO 4.- ENTRADA DE DATOS (INPUT)

4.1.- ORGANIZACION DE LA ENTRADA DE DATOS

Los datos de entrada al programa estarán constituidos por los siguientes grupos de tarjetas o líneas de entrada:

TARJETA 1.- "PARAMETROS BASICOS". Esta tarjeta contendrá el número de nudos NN, el de elementos NE, el número de nudos cargados NNC, el número de nudos de borde NNB, el módulo de elasticidad E y el coeficiente de Poisson G.

FORMATO (4I5, 2F10.0)

TARJETA 2.- "COORDENADAS NODALES". En esta tarjeta se indican el índice del nudo y sus coordenadas x e y. Se repetirá tantas veces como nudos existan.

FORMATO (I5, 2F10.0)

TARJETA 3.- "CONEXION ELEMENTAL Y PROPIEDADES". Habrá tantas tarjetas como número de elementos NE haya. En cada tarjeta se incluirá el número del elemento y los índices de los nudos ó vertices que lo delimitan. (Esta numeración se hará recorriendo el elemento siempre en un determinado sentido (del eje positivo OX al eje positivo OY) así mismo se indicará el espesor del elemento.

FORMATO (4I5, F10.0)

TARJETA 4.- "CARGAS NODALES". Se repetirán tantas tarjetas de este tipo como nudos cargados (NNC) existan. Cada tarjeta llevará el índice del nudo cargado y las componentes según los ejes OX, OY, de la carga.

FORMATO (I 5, 2F10.0)

TARJETA 5.- "NUDOS DE BORDE". Habrá tantas tarjetas como número de nudos de borde (NNB) haya. En cada una se escribirá el índice del nudo de borde y los indicadores de borde IB correspondientes a cada una de las dos componentes del desplazamiento (IB será $\neq 0$ si dicha componentes está coaccionada).

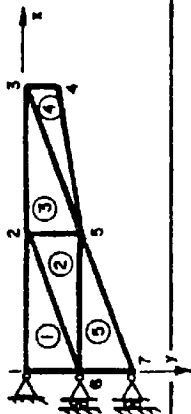
Si el desplazamiento fuera impuesto se daría además el valor de dicho desplazamiento.

FORMATO (3I5, 2F10.0)

4.2.- EJEMPLO ILUSTRATIVO

La explicación realizada de los datos de entrada constituirá la parte más importante del manual de instrucciones para el usuario del programa. Dicho documento deberá comenzar con una breve descripción del objeto del programa y de los métodos numéricos utilizados. Contendrá asimismo consideraciones sobre las opciones y limitaciones del programa. Se describirá por último la organización de ficheros de almacenamiento de datos si los hay y finalmente se dará un ejemplo de utilización del programa para mayor comprensión por parte del usuario.

Como ejemplo de aplicación se incluye a continuación la hoja de entrada de datos para el ejemplo ya tratado (figura 4.1).



PROGRAMA ELASTICIDAD BIDIMENSIONAL										SISTEMA		HOJA n°		de	
PROGRAMADOR										FECHA					
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	
7	5	1	3	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
1	0		0			0	2								
2	2	0													
3	4	0													
4	4	0													
5	2	0													
6	0	1													
7	0	2													
1	6	1	2	1											
2	2	5	6	1											
3	5	2	3	1											
4	3	4	5	1											
5	7	6	5	1											
3	0		1												
1	1	1	0												
6	1	0	0												
7	1	0	0												

TABLA 4.1

TABLA 4.1

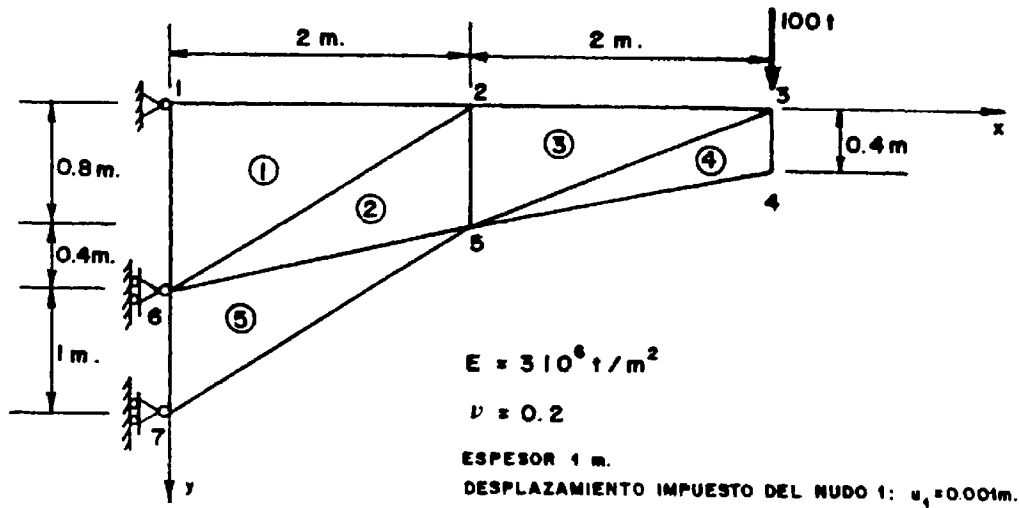


FIG. 4.1

4.3.- RECOMENDACIONES DE PROGRAMACION

Con referencia a la subrutina INPUT propiamente dicha, se observa que su entendimiento es inmediato con solo leer el listado 4.1, ampliamente comentado.

Como ya se adelantó, la misión de esta rutina es leer los datos del problema, los parámetros básicos, los de carácter geométrico (coordenadas de los nudos), los de carácter topológico o referentes a la descripción de los elementos, las cargas nodales y los datos de definición del contorno.

Estos mismos datos se imprimen con objeto de poder comprobar fácilmente los valores introducidos por el usuario del programa (ver figura 4.2).

Los formatos utilizados son iguales para la lectura y escritura pensando en la comodidad y claridad de cada operación. Para las variables enteras se recomienda el formato I10 ó como aquí el I5; se evitarán así equivocaciones de colocación de los números en la columna correspondiente.

```
C
C *****
C SUBROUTINE INPUT(X,Y,CON,PROP,VC,IB,REAC)
C *****
C
C COMMON MGD,MBAN,NGLE,NN,NE,NNC,NNB,NGLN,NNE,NGDL,NBAN,IN,IO,E,G
C DIMENSION X(*),Y(*),CON(*),PROP(*),VC(*),IB(*),REAC(*),W(3)
C *,IC(3)
C
C W = VECTOR AUXILIAR PARA ALMACENAR TEMPORALMENTE CARGAS
C NODALES Y LOS VALORES DE LAS INCOGNITAS PRESCRITAS
C
C IC =VECTOR AUXILIAR PARA ALMACENAR TEMPORALMENTE LA CONECTIVIDAD
C DE UN ELEMENTO Y EL ESTADO DE LOS INDICADORES DE BORDE
C
C LECTURA DE LOS PARAMETROS BASICOS
C
C NN = NUMERO DE NUDOS
C NE = NUMERO DE ELEMENTOS
C NNC= NUMERO DE NUDOS CARGADOS
C NNB= NUMERO DE NUDOS DE BORDE
C E = MODULO DE ELASTICIDAD
C
C WRITE(0,20)
C
C UNIDADES DE I/O
C
C READ(0,1) IN,IO
C OPEN(IN,FILE='ENTRADA')
C OPEN(IO,FILE='SALIDA')
C
20 FORMAT(81(' ')//,' 1234567890123456789012345678901234567890',
1'12345678901234567890123456789012345678901234567890',//)
READ(IN,1) NN,NE,NNC,NNB,E,G
1 FORMAT(4I5,2F10.0)
WRITE(IO,21) NN,NE,NNC,NNB,E,G
21 FORMAT(//' D A T O S I N T E R N O S'//' NUMERO DE NUDOS
* ',15/' NUMERO DE ELEMENTOS ',15/' NUMERO DE NUDOS CARGADOS'
*15/' NUMERO DE NUDOS DE BORDE',15/' MODULO DE ELASTICIDAD ',
*F15.2/' COEFICIENTE DE POISSON ',F15.2,
*//' COORDENADAS DE LOS NUDOS '/7X,'NUDO',6X,'X',9X,'Y')
C
C LECTURA DE COORDENADAS NODALES
C
C READ(IN,52) (I,X(I),Y(I),J=1,NN)
C WRITE(IO,2) (I,X(I),Y(I),I=1,NN)
2 FORMAT(I10,2F10.2)
52 FORMAT(I5,2F10.0)
C
C LECTURA DE LA CONECTIVIDAD ELEMENTAL EN EL CONJUNTO "CON" Y EL
C ESPESOR DEL ELEMENTO EN EL CONJUNTO "PROP"
C
C WRITE(IO,22)
22 FORMAT(/' CONEXION ELEMENTAL Y PROPIEDADES'/3X,'ELEMENTO',14X,
*'NUDOS',18X,'ESPESOR')
```

```
DO 3 J=1,NE
READ(IN,4) I,IC(1),IC(2),IC(3),PROP(I)
WRITE(IO,34) I,IC(1),IC(2),IC(3),PROP(I)
N1=NNE*(I-1)
CON(N1+1)=IC(1)
CON(N1+2)=IC(2)
3 CON(N1+3)=IC(3)
4 FORMAT(4I5,F10.0)
34 FORMAT(4I10,F15.5)

C
C   CALCULA NUMERO REAL DE INCOGNITAS NGDL
C   NGDL=NN*NGLN

C
C   DO 5 I=1,NGDL
5 VC(I)=0.

C
C   LEE CARGAS NODALES Y LAS ALMACENA EN EL VECTOR VC

C
C   WRITE(IO,23)
23 FORMAT(/' CARGAS EN LOS NUDOS'/7X,'NUDO',5X,'PX',8X,'PY')
DO 6 I=1,NNC
READ(IN,52)J,(W(K),K=1,NGLN)
WRITE(IO,2) J,(W(K),K=1,NGLN)
DO 6 K=1,NGLN
L=NGLN*(J-1)+K
6 VC(L)=W(K)

C
C   LEE DATOS NUDOS DE BORDE.ALMACENA LOS INDICADORES DE BORDE EN
C   LA MATRIZ IB,Y,LAS INCOGNITAS PRESCRITAS EN LA MATRIZ REAC
C

C   WRITE(IO,24)
24 FORMAT(/' CONDICIONES DE CONTORNO'/23X,'ESTADO',14X,'VALORES IM',
*'PUESTOS'/15X,'(1 IMPUESTO, 0 LIBRE)'/7X,'NUDO',8X,'U',9X,'V',
*16X,'U',9X,'V')
DO 7 I=1,NNB
READ(IN,58)J,(IC(K),K=1,NGLN),(W(K),K=1,NGLN)
WRITE(IO,9)J,(IC(K),K=1,NGLN),(W(K),K=1,NGLN)
L1=(NGLN+1)*(I-1)+1
L2=NGLN*(J-1)
IB(L1)=J
DO 7 K=1,NGLN
N1=L1+K
N2=L2+K
IB(N1)=IC(K)
7 REAC(N2)=W(K)
8 FORMAT(3I10,2F10.4)
58 FORMAT(3I5,2F10.0)
9 FORMAT(3I10,10X,2F10.4)
RETURN
END
```

D A T O S I N T E R N O S

NUMERO DE NUDOS	7
NUMERO DE ELEMENTOS	5
NUMERO DE NUDOS CARGADOS	1
NUMERO DE NUDOS DE BORDE	3
MODULO DE ELASTICIDAD	3000000.00
COEFICIENTE DE POISSON	.20

COORDENADAS DE LOS NUDOS

NUDO	X	Y
1	.00	.00
2	2.00	.00
3	4.00	.00
4	4.00	.40
5	2.00	.80
6	.00	1.20
7	.00	2.00

CONEXION ELEMENTAL Y PROPIEDADES

ELEMENTO	NUDOS		ESPESOR
1	6	1	2
2	2	5	6
3	5	2	3
4	3	4	5
5	7	6	5

CARGAS EN LOS NUDOS

NUDO	PX	PY
3	.00	100.00

CONDICIONES DE CONTORNO

NUDO	ESTADO (1 IMPUESTO, 0 LIBRE)		VALORES IMPUESTOS	
	U	V	U	V
1	1	1	.0010	.0000
6	1	0	.0000	.0000
7	1	0	.0000	.0000

FIGURA 4.2.- Escritura de los datos de entrada.

Las variables reales utilizarán para la entrada el formato F10.0 que permite los decimales que se deseen, así como su extensión a formato científico, (E+). Para la salida se recomienda el formato científico, (E+) sobre todo para las variables cuyo resultado sea de rango desconocido, se evitarán así problemas de formato que aparecen según el tipo de unidades utilizadas.

Antes de que las cargas nodales VC se lean para los nudos cargados, se pondrá a cero dicho vector, pues algunos computadores no inicializan sus variables a cero automáticamente. En caso contrario las sentencias correspondientes al DO con etiqueta 5 pueden ser eliminadas. Una vez que VC se ha leído para sus componentes no nulas, se tiene ya el vector de coeficientes independientes del sistema discreto que se pretende resolver.

4.4.- POSIBLES EXTENSIONES

La entrada de datos dentro de un programa en EF es fundamental, particularmente si se utiliza dicho programa de forma industrial. En general, la preparación de los datos exige un elevado tiempo de personal técnico, debido a las detalladas discretizaciones que deben realizarse. La posibilidad de producir errores en estos datos crece de un modo vertiginoso con el número de datos a manejar. Si bien el programa que se describe presenta un carácter didáctico conviene tener presente estos aspectos de una subrutina INPUT de un programa basado en el MEF.

En general, se debe disponer subrutinas de comprobación de datos, que avisan antes de continuar la ejecución del programa, de posibles errores. Por ejemplo, nudos no conectados, valores de coordenadas excesivamente elevados para el rango del problema, conexión degenerada de elementos etc. Es útil a este respecto, la salida gráfica de la malla, que permite mediante simple inspección comprobar la bondad de la misma. En la figura 4.3 se dibuja la malla de una estructura de revolución que consta de aproximadamente 2500 nudos (con 3 gdl por nudo) y 750 elementos isoparámetros de 8 nudos. Una comprobación convencional de una malla de este tipo es prácticamente imposible, sin utilizar medios automáticos (gráficos y numéricos).

Por otra parte existen preprocesadores o subrutinas que permiten la generación automática de una malla a partir de un número mínimo de datos de entrada. Esta malla se almacena en un fichero de cinta o disco, para su ulterior utilización de un programa de elementos finitos. Procesadores como FEMGEN realizan este tipo de operaciones y algunas de ellas son esencialmente eficientes si existe un equipo informático adecuado, en especial, la entrada mediante mesa digitalizadora. Otros preprocesadores basan su entrada de datos, en conceptos como subestructuras y permiten la utilización de macrosentencias que implican un lenguaje específico que describe distintos modos de subestructuración y su conexión. Sin embargo todos ellos se desarrollan dentro de entornos de aplicación masiva de programas en elementos finitos.

Sin entrar en los detalles de los preprocesadores anteriores es posible, incluso en programas didácticos, la generación de ciertos tipos de datos (nudos y mallas) con un mínimo esfuerzo de programación, en particular, la generación de nudos (índice y coordenadas) situados en línea recta puede efectuarse simple

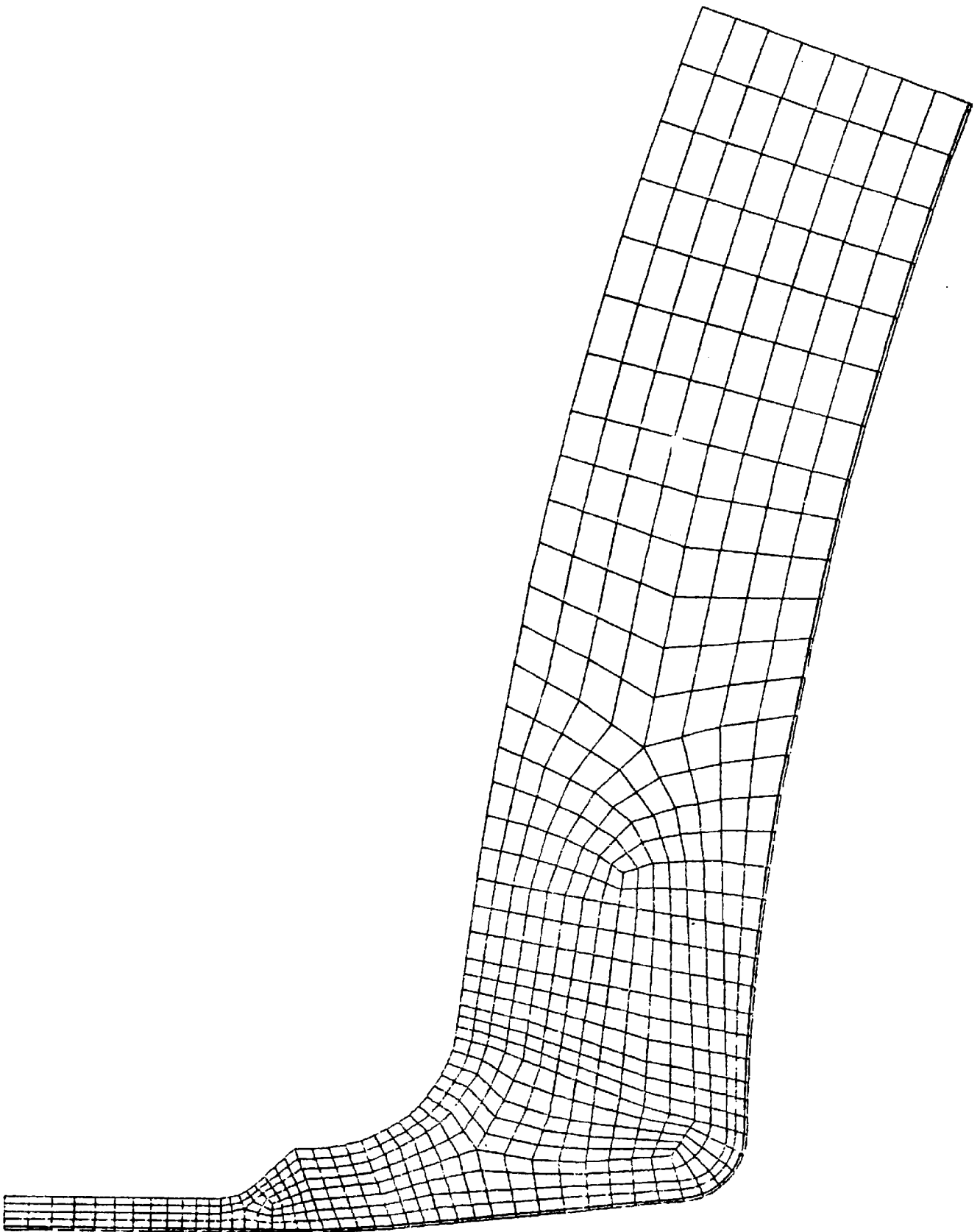


FIGURA 4.3

mente mediante la inclusión como datos básicos de los índices y coordenadas de los extremos del segmento rectilíneo que los contiene. Ello exige que el orden de las tarjetas de la entrada de datos de los nudos (tarjetas 2) sea estrictamente respetado.

EJEMPLO:

Primera tarjeta	N1	X(N1)	Y(N1)
Segunda tarjeta	N2	X(N2)	Y(N2)

Las coordenadas de los nudos intermedios $N1 < N < N2$ se obtienen inmediatamente por interpolación lineal.

Análogas consideraciones son válidas con respecto a la generación de elementos comprendidos entre dos extremos y cuya conexión varía ordenadamente.

En numerosas ocasiones, producidas por la generación automática de datos o por la inclusión de nuevos nudos y elementos en una estructura (refinamiento de una malla) es preciso reenumerar todos los nudos, si se desea conservar al ancho de banda de la estructura dentro de unos márgenes aceptables. Sería deseable, que con una numeración dada lejana a una conveniente o que conduce a un ancho de banda mínimo- se pudiera obtener automáticamente por el computador una nueva numeración para sus cálculos internos (organización de datos en la memoria, resolución del sistema, etc) y producir los resultados en la numeración original. Existen numerosos algoritmos, entre los cuales cabe destacar el sencillo pero eficiente método inverso de Cuthill-McKee. En general todos ellos se basan en la teoría general de grafos, y puede consultarse la bi-

bliografía especializada. Otra forma de simplificar la entrada de datos (y más importante aún, reducir el volumen de almacenamiento) consiste en agrupar las lecturas de las coordenadas de los nudos con la situación de los grados de libertad de dicho nudo (coaccionado o libre) es decir, con los indicadores de borde de IB. Se lee para cada nudo la siguiente información:

NUDO	ABSCISA	ORDENADA	Indicadores = 0 libre ; 1 = coaccionado		valores	
			u_i	v_i	u_i	v_i
I	$x(I)$	$y(I)$				

En los nudos libres la entrada anterior sólo se extiende a las coordenadas, permaneciendo en blanco las otras variables (*).

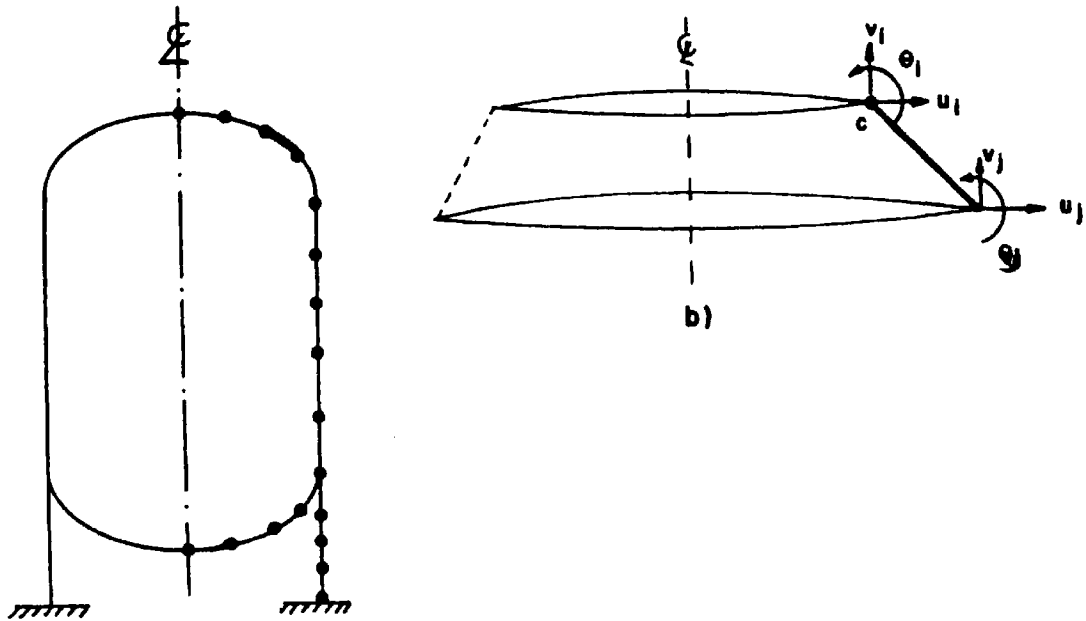
A la tarjeta anterior se puede añadir variables adicionales (temperatura nodal y el espesor en cada nudo si fueran variables linealmente dentro de cada elemento).

La posibilidad anterior es una de las muchas y diferentes alternativas de entrada de datos que pueden proveerse en un programa de elementos finitos, y se ha comentado con propósito ilustrativo.

NOTA(*): Es posible de esta forma simular muy sencillamente liberalizaciones estructurales muy diversas (rótulas, grupos de barras con nudos rígidos unidos mediante rótula a otro grupo, etc), igualdad entre gdl (estructuras de edificación), condiciones homogéneas de borde (gdl no activos) etc.

CAPITULO 4.- EJERCICIOS

- 4.1. Un recipiente a presión de paredes delgadas (figura a) se discretiza en los 17 elementos indicados en la figura a). Dichos elementos son láminas de revolución, con 3 grados de libertad en cada nudo, tal como se muestra en la figura b).



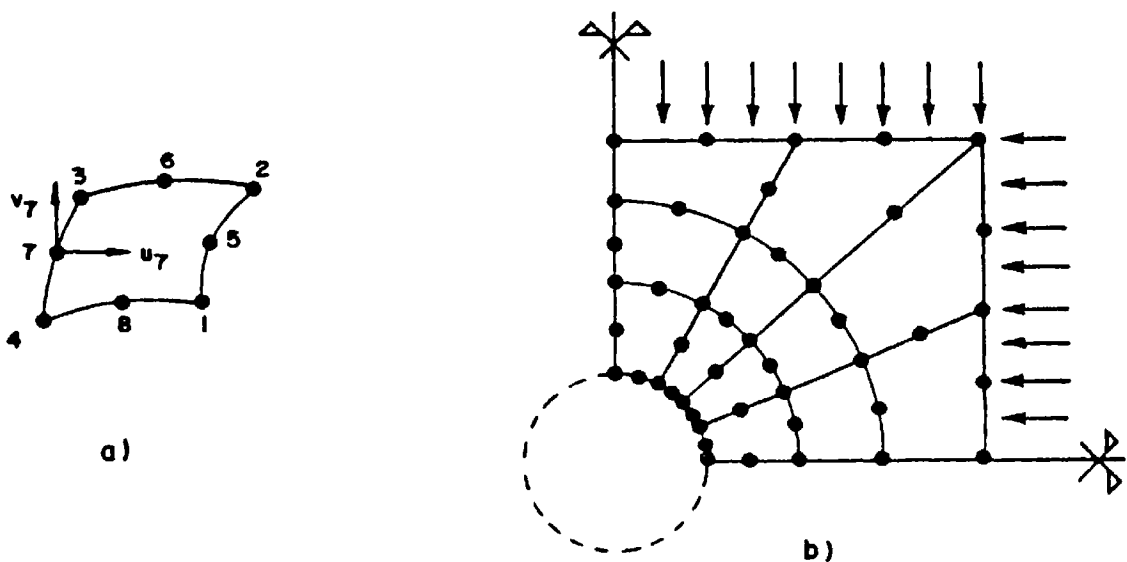
a)

Se pide numerar convenientemente los nudos para que el ancho de banda sea mínimo. ¿Cuál es éste ancho de banda?.

- 4.2. Cuando se utilizan técnicas de resolución frontal del sistema de ecuaciones $\underline{K} \underline{U} = \underline{F}$, el sistema de numeración de los nudos de la malla, pierde su importancia al no entrar en juego el ancho de banda de la matriz \underline{K} .

En estos casos lo verdaderamente importante es numerar convenientemente los elementos, de manera que el frente máximo sea el menor posible, tal como se verá en el Capítulo 6. Es decir, la máxima diferencia entre los índices de los elementos que concurren en cada nudo debe ser mínima.

Realizadas estas consideraciones se pide numerar los elementos isoparamétricos de 8 nudos (figura a) en que se discretiza el dominio de la figura b):



Hallar así mismo el frente máximo requerido.

- 4.3. Un sencillo chequeo de los datos de entrada referentes a la geometría y topología de la malla, es comprobar que el área A_e de cada elemento finito es positiva y mayor que un cierto valor mínimo. De esta forma se pueden detectar los posibles errores en la conexión de los elementos o en las coordenadas de los nudos.

Se pide programar en lenguaje FORTRAN, un test de este tipo e incluir dichas sentencias dentro de la rutina INPUT, en el lugar apropiado.

CAPITULO 5.- FORMACION DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ DE LA ESTRUCTURA

5.1.- SUBROUTINA GENERAL (ENSAM)

La subrutina ENSAM está compuesta por un conjunto de subrutinas que se encargan de gestionar la formación de la matriz de rigidez de toda la estructura. Comienza calculando el semiancho de banda NBAN, sigue con la puesta a cero de la matriz de rigidez RIG y para finalizar realiza su labor más importante en un bucle que se extiende a todos los elementos, al llamar a la subrutina RIGID para que calcule la matriz de rigidez elemental y a la rutina ELENS encargada de añadir "convenientemente" (suma booleana o ensamblaje) la matriz elemental a la global.

El semiancho de banda puede calcularse, analizando todos los elementos y registrando la máxima diferencia existente entre los índices de los nudos que definen los 3 vertices de cada triángulo, valor al que se añadirá 1 y se multiplicará por 2 que es el número de grados de libertad por nudo.

Sin embargo, para cubrir también la posibilidad de que un elemento no tenga 3 nudos o que no tenga 2 gdl por nudo, y así poder aplicarlos a cualquier tipo de elemento finito, se dejarán las variables NNE y NGLN sin asignarlas un valor concreto.

Así pues, en un elemento dado se hallarán las diferencias entre el índice de cada nudo y el índice de los restantes nudos del elemento, registrando la mayor de estas. Realizando esta operación para cada uno de los elementos en que se discretizó la estructura, el semiancho de banda corresponderá a la máxima de

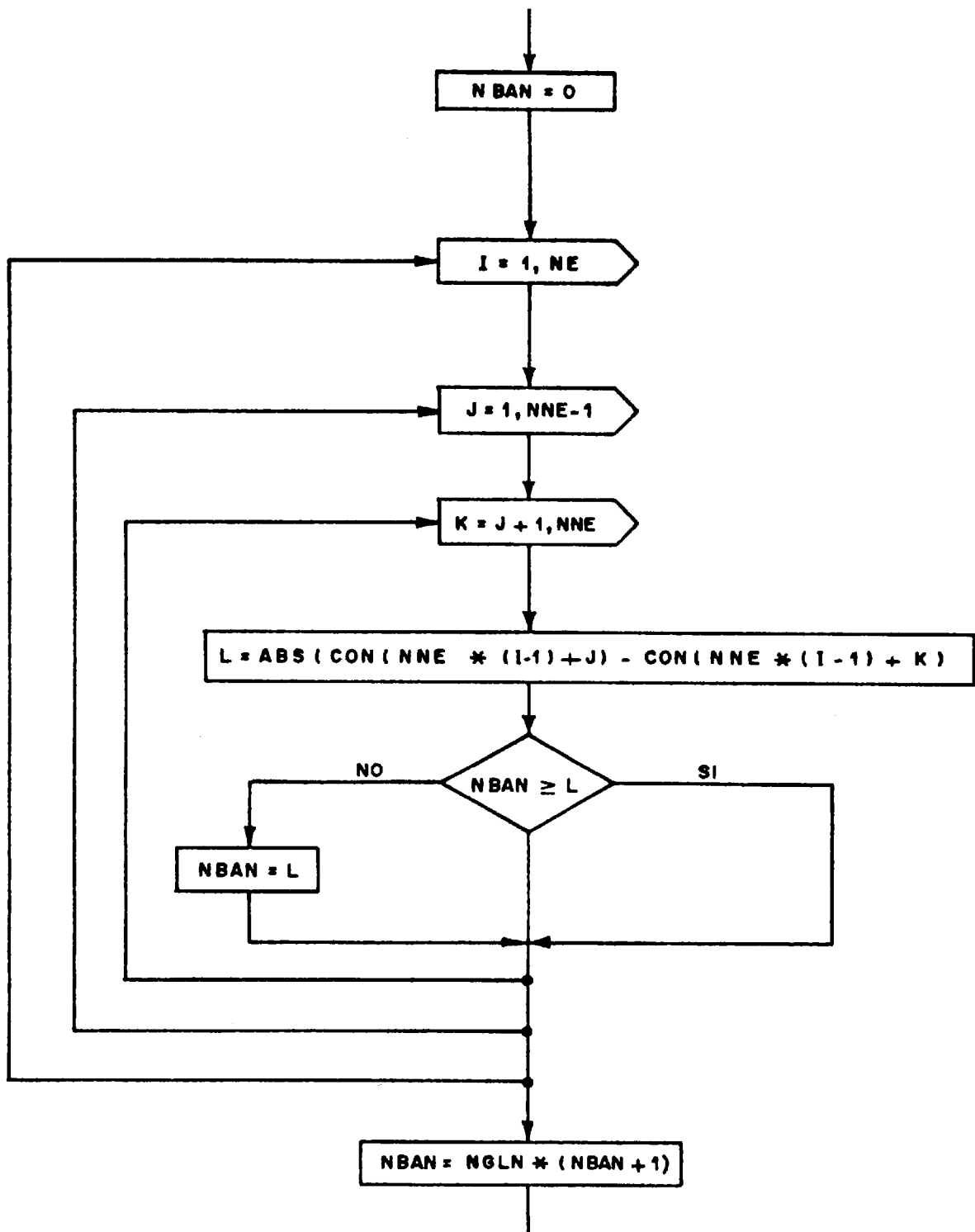


FIG. 5.1. - ORGANIGRAMA PARA CALCULO DE SEMIANCHO DE BANDA EN EL CASO MAS GENERAL


```

C
C *****
C SUBROUTINE ENSAM(X,Y,CON,PROP,RIG,RIGEL,VC)
C *****
C
C ENSAMBLAJE DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL
C
C COMMON MGD,MBAN,NGLE,NN,NE,NNC,NNB,NGLN,NNE,NGDL,NBAN,IN,IO,E,G
C DIMENSION X(*),Y(*),CON(*),RIG(200,40),RIGEL(6,6),PROP(*),VC(*)
C
C CALCULA DEL SEMIANCHO DE BANDA Y LO ALMACENA EN NBAN
C
C N1=NNE-1
C NBAN=0
C DO 7 I=1,NE
C L1=NNE*(I-1)
C DO 7 J=1,N1
C L2=L1+J
C J1=J+1
C DO 7 K=J1,NNE
C L3=L1+K
C L=IABS(CON(L2)-CON(L3))
C IF(NBAN-L)6,7,7
6 NBAN=L
7 CONTINUE
C NBAN=NGLN*(NBAN+1)
C
C PUESTA A CERO DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL
C
C DO 10 I=1,NGDL
C DO 10 J=1,NBAN
10 RIG(I,J)=0.0
C
C BUCLE DE LOS ELEMENTOS Y ENSAMBLAJE
C
C DO 20 NEL=1,NE
C
C RIGID CALCULA LA MATRIZ DE RIGIDEZ DEL ELEMENTO NEL
C
C CALL RIGID(NEL,X,Y,PROP,CON,RIGEL,VC)
C
C ELENS SITUA LA MATRIZ DE RIGIDEZ ELEMENTAL EN LA GLOBAL
C
20 CALL ELENS(NEL,CON,RIG,RIGEL)
C
C RETURN
C END

```

estas diferencias registrada para cada elemento, tal como se muestra en el organigrama que se da en la siguiente figura 5.1.

Las sentencias en lenguaje FORTRAN para el cálculo del semiancho de banda, coinciden practicamente con las del organigrama anterior salvo pequeñas modificaciones para adaptarse a las reglas de codificación.

A continuación se ponen a cero los elementos de la matriz de rigidez global, operación necesaria y previa a la suma booleana de las matrices elementales ($\underline{k} = \sum \underline{k}^e$) que se realiza mediante las dos rutinas a que llama este subprograma (*). Las rutinas RIGID y ELENS se analizarán a continuación.

5.2.- CALCULO DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ ELEMENTAL (RIGID)

5.2.1.- ELEMENTO TRIANGULAR CT

El elemento finito triangular con funciones de forma polinomios lineales (de primer grado) constituye el ejemplo más simple de elemento finito y es el que se va a programar en esta subrutina. Su formulación es muy sencilla y supo

NOTA(*): Fijarse que en la lista de argumentos de entrada a la rutina RIGID se incluye el vector VC de cargas nodales, para que se añadan a él las cargas en los nudos equivalentes a las fuerzas másicas y de superficie que actúan en el elemento o incluso efectos térmicos u otros (VC es pues un argumento de entrada-salida). En este caso como ya se expuso anteriormente, se limita a la situación de cargas actuantes en los nudos solamente, transformando el usuario otro tipo de cargas a nodales e introduciéndolas en el cálculo mediante entrada de datos. Por tanto, no procede la inclusión de VC en la lista de argumentos de la rutina RIGID, no obstante lo cual se dejará así para prever futuras ampliaciones del programa.

ne que los movimientos u y v son funciones lineales de las coordenadas (x,y) . Es conveniente por su facilidad de extensión a otros elementos triangulares, utilizar en lugar de las coordenadas (x,y) unas triangulares o baricéntricas - (L_1, L_2, L_3) definidas como sigue:

Sea P un punto de coordenadas (x,y) (ver figura 5.2). Se puede referir su posición respecto al triángulo de vértices $i(i=1,2,3)$ de coordenadas (x_i, y_i) , mediante los siguientes valores adimensionales denominados coordenadas triangulares o baricéntricas:

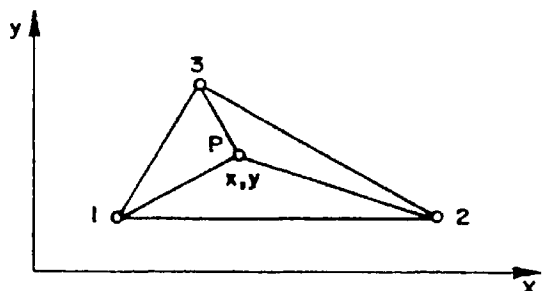
$$L_1 = \frac{\text{area } \triangle P 2 3}{\text{area } \triangle 1 2 3} \quad [5.1]$$

Sólo se presentan aquí las expresiones respecto a una coordenada. Las correspondientes a las restantes se obtienen mediante simple permutación circular $(1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1)$.

Evidentemente por definición se cumple:

$$L_1 + L_2 + L_3 = 1 \quad [5.2]$$

La fórmula (5.1) puede expresarse como sigue:



$$L_1 = \frac{1}{2A} \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \quad [5.3]$$

FIG. 5.2

$$\text{con } A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \text{ el area del triángulo}$$

Las fórmulas de transformación de coordenadas cartesianas a triangulares vienen representadas por la ecuación (5.2) que puede ponerse como sigue:

$$L_1 = \frac{1}{2A} (b_1 x + a_1 y + c_1) \quad [5.4]$$

$$\text{con } \begin{aligned} a_1 &= x_3 - x_2 \\ b_1 &= y_2 - y_3 \\ c_1 &= y_3 x_2 - x_3 y_2 \end{aligned}$$

Las fórmulas de transformación inversa se recogen en la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} \quad [5.5]$$

En el método de los elementos finitos es preciso obtener derivadas de una función $F(L_1, L_2, L_3)$ respecto a las coordenadas cartesianas (x, y) . Las fórmulas que permiten esta operación son:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial F}{\partial L_i} \frac{\partial L_i}{\partial x} = \frac{1}{2A} \sum_{i=1}^3 b_i \frac{\partial F}{\partial L_i} \quad [5.6a]$$

y análogamente

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial F}{\partial L_i} \frac{\partial L_i}{\partial y} = \frac{1}{2A} \sum_{i=1}^3 a_i \frac{\partial F}{\partial L_i} \quad [5.6b]$$

Se puede mostrar fácilmente la validez de la siguiente expresión simbólica:

$$\frac{\partial^{m+n} F}{\partial x^m \partial y^n} = \left[\frac{1}{2A} \sum_{i=1}^3 b_i \frac{\partial F}{\partial L_i} \right]^m \left[\frac{1}{2A} \sum_{j=1}^3 a_j \frac{\partial F}{\partial L_j} \right]^n \quad [5.7]$$

siendo

$$\left(\frac{\partial F}{\partial L_i} \right)^k \equiv \frac{\partial^k F}{\partial L_i^k}$$

Con la introducción de las coordenadas triangulares, la expresión de los movimientos μ y v dentro de un elemento es:

$$\begin{aligned} \mu &= \mu_1 L_1 + \mu_2 L_2 + \mu_3 L_3 \\ v &= v_1 L_1 + v_2 L_2 + v_3 L_3 \end{aligned} \quad [5.8]$$

en donde μ_i, v_i ($i=1,2,3$) son los valores de los movimientos en cada uno de los vertices (nudos) del elemento triangular.

La obtención de la matriz de rigidez del elemento sigue los pasos comentados en capítulos anteriores.

1) Funciones de forma.

$$\begin{pmatrix} \mu \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 & 0 & L_2 & 0 & L_3 & 0 \\ 0 & L_1 & 0 & L_2 & 0 & L_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ v_1 \\ \mu_2 \\ v_2 \\ \mu_3 \\ v_3 \end{pmatrix} = \underline{N} \underline{U} \quad [5.9]$$

Las funciones de forma coinciden directamente con las coordenadas triangulares

2) Vector deformación

$$\underline{\epsilon} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = \underline{L} \cdot \underline{u} = \underline{L} \cdot \underline{N} \cdot \underline{v} = \underline{B} \cdot \underline{U} \quad [5.10]$$

con

$$\underline{B} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 & 0 & L_2 & 0 & L_3 & 0 \\ 0 & L_1 & 0 & L_2 & 0 & L_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2R} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & a_2 & 0 & a_3 \\ a_1 & b_1 & a_2 & b_2 & a_3 & b_3 \end{bmatrix}$$

Se observa que $\underline{\epsilon} = \underline{cte.}$ de ahí su nombre de CT (constant triangle).

3) Matriz de rigidez elemental.

recordando que:

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

se tiene que:

$$\underline{k}^e = \int_A \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} dA = t \cdot A \cdot \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} \quad [5.11]$$

y realizando las operaciones indicadas en (5.11) resulta la expresión de la ta
bla 5.1.

Se observa fácilmente que los elementos de la matriz de rigidez pertenecientes a filas impares $IX = 2(I-1)+1$ con $(I=1,2,3)$ y a columnas impares $JX = 2(J-1)+1$ con $(J=1,2,3)$ tienen por expresión:

$$k(Ix, Jx) = \left[b_i b_j + \left(\frac{1-\nu}{2} \right) a_i a_j \right] * cte$$

analogamente para filas y columnas pares $Iz = 2(I-1)+2$, $Jz = 2(J-1)+2$ se tiene:

$$k(Iz, Jz) = \left[a_i a_j + \left(\frac{1-\nu}{2} \right) b_i b_j \right] * cte$$

para fila impares y columnas pares o viceversa se tiene:

$$k(Ix, Iz) = \left[\nu b_i a_j + \left(\frac{1-\nu}{2} \right) b_j a_i \right] * cte$$

$$k(Iz, Ix) = \left[\nu a_i b_j + \left(\frac{1-\nu}{2} \right) a_j b_i \right] * cte$$

$$K^0 = \frac{E \cdot I \cdot A}{(2A)^2 (1-\nu^2)}$$

μ_1	ν_1	μ_2	ν_2	μ_3	ν_3
$b_1^2 + \left(\frac{1-\nu}{2}\right) a_1^2$	$\nu b_1 a_1 + \left(\frac{1-\nu}{2}\right) a_1 b_1$	$b_1 b_2 + \left(\frac{1-\nu}{2}\right) a_1 a_2$	$\nu b_1 a_2 + \left(\frac{1-\nu}{2}\right) a_1 b_2$	$b_1 b_3 + \left(\frac{1-\nu}{2}\right) a_1 a_3$	$\nu b_1 a_3 + \left(\frac{1-\nu}{2}\right) a_1 b_3$
$\nu a_1 b_1 + \left(\frac{1-\nu}{2}\right) b_1 a_1$	$a_1^2 + \left(\frac{1-\nu}{2}\right) b_1^2$	$\nu a_1 b_2 + \left(\frac{1-\nu}{2}\right) b_1 a_2$	$a_1 a_2 + \left(\frac{1-\nu}{2}\right) b_1 b_2$	$\nu a_1 b_3 + \left(\frac{1-\nu}{2}\right) b_1 a_3$	$a_1 a_3 + \left(\frac{1-\nu}{2}\right) b_1 b_3$
$b_2 b_1 + \left(\frac{1-\nu}{2}\right) a_2 a_1$	$\nu b_2 a_1 + \left(\frac{1-\nu}{2}\right) a_2 b_1$	$b_2^2 + \left(\frac{1-\nu}{2}\right) a_2^2$	$\nu b_2 a_2 + \left(\frac{1-\nu}{2}\right) a_2 b_2$	$b_2 b_3 + \left(\frac{1-\nu}{2}\right) a_2 a_3$	$\nu b_2 a_3 + \left(\frac{1-\nu}{2}\right) a_2 b_3$
$\nu a_2 b_1 + \left(\frac{1-\nu}{2}\right) b_2 a_1$	$a_2 a_1 + \left(\frac{1-\nu}{2}\right) b_2 b_1$	$\nu a_2 b_2 + \left(\frac{1-\nu}{2}\right) b_2 a_2$	$a_2^2 + \left(\frac{1-\nu}{2}\right) b_2^2$	$\nu a_2 b_3 + \left(\frac{1-\nu}{2}\right) b_2 a_3$	$a_2 a_3 + \left(\frac{1-\nu}{2}\right) b_2 b_3$
$b_3 b_1 + \left(\frac{1-\nu}{2}\right) a_3 a_1$	$\nu b_3 a_1 + \left(\frac{1-\nu}{2}\right) a_3 b_1$	$b_3 b_2 + \left(\frac{1-\nu}{2}\right) a_3 a_2$	$\nu b_3 a_2 + \left(\frac{1-\nu}{2}\right) a_3 b_2$	$b_3^2 + \left(\frac{1-\nu}{2}\right) a_3^2$	$\nu b_3 a_3 + \left(\frac{1-\nu}{2}\right) a_3 b_3$
$\nu a_3 b_1 + \left(\frac{1-\nu}{2}\right) b_3 a_1$	$a_3 a_1 + \left(\frac{1-\nu}{2}\right) b_3 b_1$	$\nu a_3 b_2 + \left(\frac{1-\nu}{2}\right) b_3 a_2$	$a_3 a_2 + \left(\frac{1-\nu}{2}\right) b_3 b_2$	$\nu a_3 b_3 + \left(\frac{1-\nu}{2}\right) b_3 a_3$	$b_3^2 + \left(\frac{1-\nu}{2}\right) a_3^2$

TABLA 5.1.- MATRIZ DE RIGIDEZ ELEMENTAL. TRIANGULO DE DEFORMACION CTE (CT)

mediante estas expresiones de los elementos de la matriz de rigidez elemental resulta inmediata la programación de la rutina RIGID, una vez que se han definido las variables geométricas a_i, b_i , las cuales representan incrementos de abscisas y ordenadas de los nudos del triángulo, conocidos por medio del vector de conexión CON. (Ver listado 5.2).

5.2.2.- POSIBLES EXTENSIONES

Es fácil extender la formulación del elemento triangular anterior a casos con variación lineal de las características del elemento dentro del mismo. Por ejemplo, el espesor se describe por sus valores en los nudos como sigue:

$$t = t_1 N_1 + t_2 N_2 + t_3 N_3 = \underline{N} \underline{t} \quad [5.12]$$

con $N_i = L_i$ la correspondiente función de forma.

La matriz de rigidez que resulta es idéntica a la expresada en (5.11) considerando \underline{t} como un espesor medio:

$$t = \frac{t_1 + t_2 + t_3}{3}$$

La obtención de este resultado precisa calcular las siguientes integrales extendidas al triángulo:

$$\iint_{\Delta} L_1^a L_2^b L_3^c dA = 2A \frac{a! b! c!}{(a+b+c+2)!} \quad [5.13]$$

```
C
C *****
C SUBROUTINE RIGID(NEL,X,Y,PROP,CON,RIGEL,VC)
C *****
C
C CALCULA LA MATRIZ DE RIGIDEZ ELEMENTAL
C
C COMMON MGD,MBAN,NGLE,NN,NE,NNC,NNB,NGLN,NNE,NGDL,NBAN,IN,IO,E,G
C DIMENSION X(*),Y(*),CON(*),PROP(*),RIGEL(6,6),A(3),B(3),VC(*)
C
C NEL      = NUMERO DEL ELEMENTO
C N1,N2,N3 = INDICES DE LOS NUDOS DEL ELEMENTO
C
C L=NNE*(NEL-1)+1
C N1=CON(L)
C N2=CON(L+1)
C N3=CON(L+2)
C
C DEFINICION DE COORDENADAS TRIANGULARES
C
C B(1)=Y(N2)-Y(N3)
C B(2)=Y(N3)-Y(N1)
C B(3)=Y(N1)-Y(N2)
C A(1)=X(N3)-X(N2)
C A(2)=X(N1)-X(N3)
C A(3)=X(N2)-X(N1)
C AREA=(B(1)*A(2)-B(2)*A(1))/2.
C
C ALA=E*PROP(NEL)*AREA/(1.-G*G)/(4.*AREA**2)
C AX=(1.-G)/2.
C
C CALCULA MATRIZ DE RIGIDEZ ELEMENTAL
C
C DO 2 I=1,6
C DO 2 J=1,6
2 RIGEL(I,J)=0.
C DO 3 I=1,3
C IX=(I-1)*2+1
C IZ=(I-1)*2+2
C DO 3 J=1,3
C JX=(J-1)*2+1
C JZ=(J-1)*2+2
C RIGEL(IX,JX)=(B(I)*B(J)+AX*A(I)*A(J))*ALA
C RIGEL(IZ,JZ)=(A(I)*A(J)+AX*B(I)*B(J))*ALA
C RIGEL(IX,JZ)=(G*B(I)*A(J)+AX*A(I)*B(J))*AL
3 RIGEL(IZ,JX)=(G*A(I)*B(J)+AX*B(I)*A(J))*AL
C RETURN
C END
```

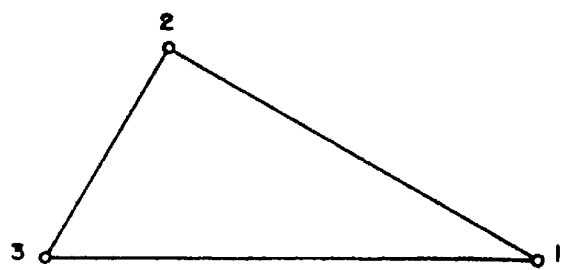
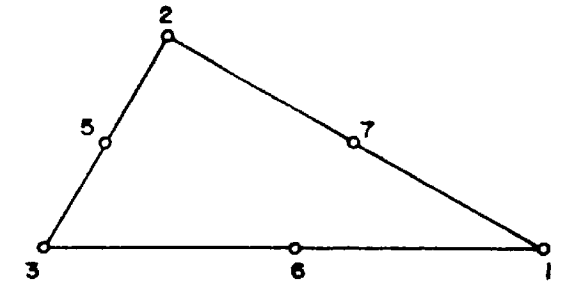
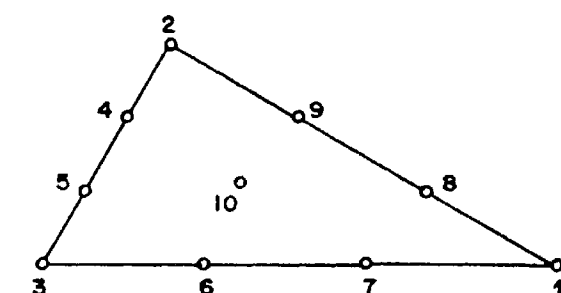
Elemento	Función de forma
 <p data-bbox="336 483 539 517">Lineal (CST)</p>	$N_1 = L_1$
 <p data-bbox="336 920 596 954">Cuadrático (LST)</p>	$N_1 = 2 L_1 (L_1 - \frac{1}{2})$ $N_5 = 4 L_2 L_3$
 <p data-bbox="336 1391 443 1426">Cúbico</p>	$N_1 = \frac{9}{2} L_1 (L_1 - \frac{2}{3}) (L_1 - \frac{1}{3})$ $N_4 = \frac{27}{2} L_2 L_3 (L_2 - \frac{1}{3})$ $N_5 = \frac{27}{2} L_2 L_3 (L_3 - \frac{1}{3})$ $N_{10} = 27 L_1 L_2 L_3$

FIG. 5.3.- ELEMENTOS TRIANGULARES DE ORDEN C^0

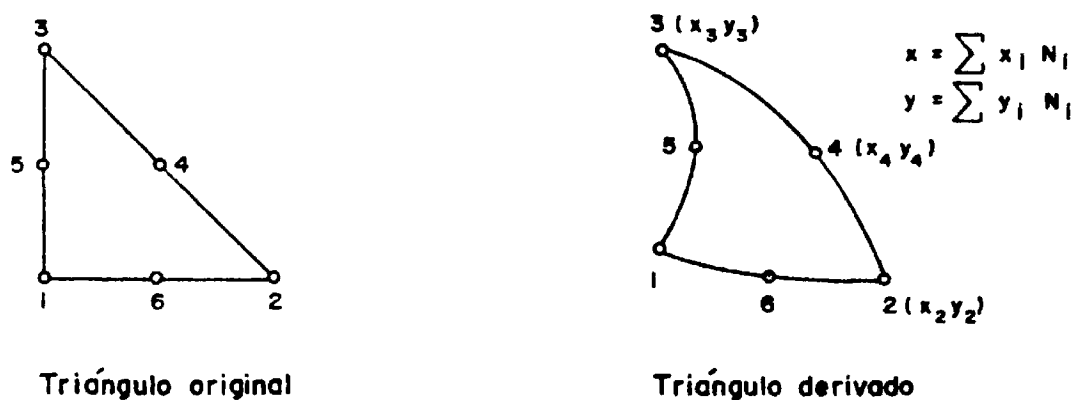


FIG. 5.4.- TRANSFORMACION GEOMETRICA ISOPARAMETRICA

Si se utilizan elementos triangulares con funciones de forma polinomios de orden superior al primero, es preciso introducir nuevos nudos, dispuestos de un modo simétrico a lo largo de los lados y en el interior (centro de gravedad) del triángulo.

En la figura 5.3. se representan algunos de estos elementos triangulares de orden superior, con sus funciones de forma.

La obtención de la matriz \underline{B} y por consiguiente, la matriz de rigidez \underline{k}^e del elemento sigue las etapas ya comentadas y constituye un proceso totalmente mecanizado.

Es frecuente considerar una transformación geométrica del triángulo en otro en general curvilíneo (transformaciones isoparamétricas ó sub-ó hiperparamétricas, según se usen funciones de forma idénticas, de grado inferior o superior a las de campo). De esta forma es posible adaptar, de un modo más adecuado, los elementos, con sus lados curvos al contorno real de la estructura.

Por ejemplo (figura 5.4) se puede transformar el triángulo "original" de lados rectos en otro "derivado" con lados curvos, mediante funciones de forma del tipo de las comentadas para interpolar los movimientos u y v .

Por ejemplo, la siguiente transformación geométrica del plano (L_1, L_2, L_3) en (x, y) :

$$\begin{aligned} x &= N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3 + \dots + N_6 x_6 \\ y &= N_1 y_1 + N_2 y_2 + N_3 y_3 + \dots + N_6 y_6 \end{aligned} \quad [5.12]$$

con N_i las funciones de forma del triángulo cuadrático (indicados en la figura 5.3) y (x_i, y_i) las coordenadas de los nudos del triángulo derivado, establece una correspondencia entre nudos igual numerados de los triángulos original y derivado. Es decir, los nudos del triángulo original $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$ y $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ se transforman en los siguientes del triángulo derivado (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) , (x_4, y_4) , (x_5, y_5) y (x_6, y_6) respectivamente.

Generalmente, si se utiliza este tipo de transformación, es complejo llevar a cabo el cálculo analítico de la integral (5.11) que conduce a la matriz de rigidez así como la obtención de la matriz \underline{B} que relaciona deformaciones con desplazamientos. En efecto, se hace preciso obtener la transformación inversa de la transformación paramétrica directa (del tipo 5.12), lo que constituye una labor tediosa para funciones de forma no lineales. Por ello se recurre a la integración numérica, y generalmente de tipo Gauss por su economía de esfuerzo de cálculo.

En un triángulo de área A la fórmula de Gauss, con N puntos se escribe:

$$\iint_A f(L_1, L_2, L_3) dL_1 dL_2 = \sum_{n=1}^N W_n^N f(L_{1n}^N, L_{2n}^N, L_{3n}^N) \quad [5.13]$$

con W_n^N y $L_{1n}^N, L_{2n}^N, L_{3n}^N$ peso y coordenadas de los puntos de Gauss en los que se evalúa la función integrando respectivamente. En la figura 5.7 se muestran los valores de los pesos y coordenadas de los puntos de Gauss.

En un programa en EF se procede como se indica a continuación para el caso concreto de la transformación (5.12). La derivación de esta transformación conduce:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial L_1} \\ \frac{\partial}{\partial L_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial L_1} - \frac{\partial x}{\partial L_3} & \frac{\partial y}{\partial L_1} - \frac{\partial y}{\partial L_3} \\ \frac{\partial x}{\partial L_2} - \frac{\partial x}{\partial L_3} & \frac{\partial y}{\partial L_2} - \frac{\partial y}{\partial L_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}$$

o bien

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial L_1} \\ \frac{\partial}{\partial L_2} \end{bmatrix} = \underline{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad [5.14]$$

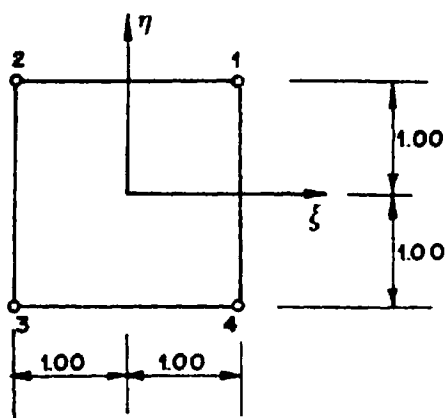
$$\text{con } \underline{J} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^6 \left(\frac{\partial N_i}{\partial L_1} x_i - \frac{\partial N_i}{\partial L_3} x_i \right) \sum_{i=1}^6 \left(\frac{\partial N_i}{\partial L_1} y_i - \frac{\partial N_i}{\partial L_3} y_i \right) \\ \sum_{i=1}^6 \left(\frac{\partial N_i}{\partial L_2} x_i - \frac{\partial N_i}{\partial L_3} x_i \right) \sum_{i=1}^6 \left(\frac{\partial N_i}{\partial L_2} y_i - \frac{\partial N_i}{\partial L_3} y_i \right) \end{bmatrix}$$

La matriz \underline{J} se evalua para cada uno de los puntos de Gauss y se obtiene numéricamente en el computador su inversa \underline{J}^{-1} por lo que se puede escribir para cada uno de los puntos de Gauss:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = \underline{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial L_1} \\ \frac{\partial}{\partial L_2} \end{bmatrix} \quad [5.15]$$

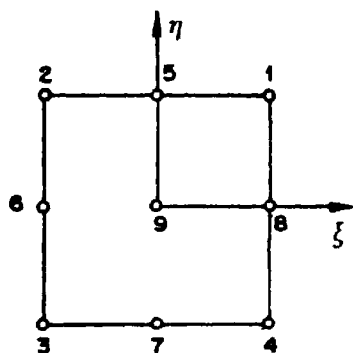
Mediante el uso de la fórmula de paso la derivación (5.15) se puede calcular el integrando de la expresión (5.11) de la matriz de rigidez para cada punto de Gauss ($L_{1n}^N, L_{2n}^N, L_{3n}^N$):

$$\underline{B}^T \underline{D} \underline{B}$$



Bilineal

$$N_i = \frac{1}{4} (1 + \xi_0 \xi) (1 + \eta_0 \eta)$$



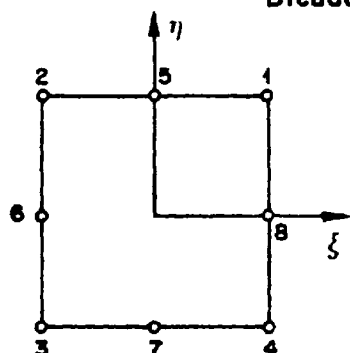
Bicuadrático

$$\text{VERTICES: } N_i = \frac{1}{4} (\xi^2 + \xi_0 \xi) (\eta^2 + \eta_0 \eta)$$

$$\text{PUNTOS MEDIOS DE LOS LADOS } N_i = (1 - \xi^2) (\eta^2 + \eta_0 \eta) \quad (i = 5, 7)$$

$$N_i = (1 - \eta^2) (\xi^2 + \xi_0 \xi) \quad (i = 6, 8)$$

$$N_q = (1 - \xi^2) (1 - \eta^2)$$



Serpindino (8 nudos)

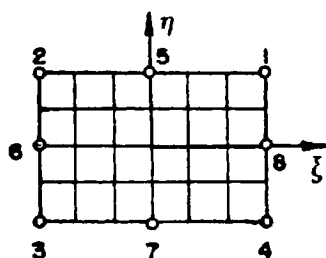
$$\text{VERTICES: } N_i = \frac{1}{4} (1 + \xi_0 \xi) (1 + \eta_0 \eta) (\xi_0 \xi + \eta_0 \eta - 1)$$

$$\text{PUNTOS MEDIOS DE LOS LADOS } N_i = \frac{1}{2} (1 - \xi^2) (1 + \eta_0 \eta) \quad (i = 5, 7)$$

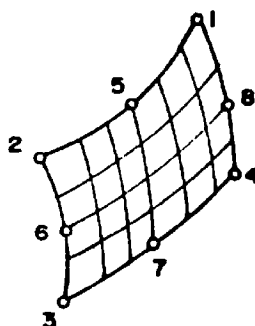
$$N_i = \frac{1}{2} (1 - \eta^2) (1 + \xi_0 \xi) \quad (i = 6, 8)$$

(ξ_0, η_0 Coordenadas del nudo i)

FIG. 5.5.- ELEMENTOS CUADRILATEROS "ORIGINALES" (cuadrados) DE ORDEN C^0



Cuadrilatero original



Cuadrilatero derivado

$$x = \sum x_i N_i$$

$$y = \sum y_i N_i$$

FIG. 5.6.- TRANSFORMACION GEOMETRICA ISOPARAMETRICA

Abcisas y coeficientes de peso de la fórmula de la cuadratura de Gauss

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{j=1}^n H_j f(a_j),$$

$\pm a$	H		
	$n = 1$		
0		2.00000	00000 00000
	$n = 2$		
0.57735 02691 89626		1.00000	00000 00000
	$n = 3$		
0.77459 66692 41483		0.55555	55555 55556
0.00000 00000 00000		0.88888	88888 88889
	$n = 4$		
0.86113 63115 94053		0.34785	48451 37454
0.33998 10435 84856		0.65214	51548 62546
	$n = 5$		
0.90617 98459 38664		0.23692	68850 56189
0.53846 93101 05683		0.47862	86704 99366
0.00000 00000 00000		0.56888	88888 88889
	$n = 6$		
0.93246 95142 03152		0.17132	44923 79170
0.66120 93864 66265		0.36076	15730 48139
0.23861 91860 83197		0.46791	39345 72691
	$n = 7$		
0.94910 79123 42759		0.12948	49661 68870
0.74153 11855 99394		0.27970	53914 89277
0.40584 51513 77397		0.38183	00505 05119
0.00000 00000 00000		0.41795	91836 73469
	$n = 8$		
0.96028 98564 97536		0.10122	85362 90376
0.79666 64774 13627		0.22238	10344 53374
0.52553 24099 16329		0.31370	66458 77887
0.18343 46424 95650		0.36268	37833 78362
	$n = 9$		
0.96816 02395 07626		0.08127	43883 61574
0.83603 11073 26636		0.18064	81606 94857
0.61337 14327 00590		0.26061	06964 02935
0.32425 34234 03809		0.31234	70770 40003
0.00000 00000 00000		0.33023	93550 01260
	$n = 10$		
0.97390 65285 17172		0.06667	13443 08688
0.86506 33666 88985		0.14945	13491 50581
0.67940 95682 99024		0.21908	63625 15982
0.43339 53941 29247		0.26926	67193 09996
0.14887 43389 81631		0.29552	42247 14753

FIGURA 5.7

y aplicar directamente la expresión (5.13).

La extensión de los conceptos anteriores al caso de elementos triangulares es inmediata.

En la figura 5.5 se muestran algunos elementos cuadriláteros (cuadrados) originales y las funciones de forma C^0 que se consideran.

La idea de la transformación paramétrica (5.6) es totalmente aplicable a estos elementos cuadriláteros, simplemente las fórmulas de integración numérica de Gauss que se aplican corresponden a las dadas en la figura 5.7, es decir, para una integración de orden $N \times M$ se tiene:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M w_n^N w_m^M f(\xi_n^N, \eta_m^M)$$

Las anteriores consideraciones permiten elaborar a partir de las funciones de forma, de un modo automático las matrices específicas de un elemento (*), para cualquier tipo y orden de elemento. Los programas generales en EF disponen por este motivo rutinas de tipo SHAPE (FORMA) y GAUSS.

NOTA(*): Se hace referencia a la matriz \underline{B} que relaciona movimientos en los nudos y deformación en el elemento, la de rigidez \underline{k} , cargas equivalentes y masa consistente que no se comentan aquí pero cuyo cálculo es totalmente automático.

La primera permite evaluar las funciones de forma y sus derivadas, la matriz jacobiana J, su inversa y su determinante, la matriz B, temperaturas, deformaciones iniciales y espesor del elemento en cualquier punto de coordenadas especificadas. La segunda rutina genera la matriz del elemento, la de fuerzas equivalentes y la de masas consistente, mediante la técnica númerica de integración de Gauss.

En el ejemplo que se ha utilizado, no se ha procedido de esta forma general, por motivos didácticos. Estos detalles podrían impedir una compresión adecuada de los fundamentos del MEF.

5.3.- ENSAMBLAJE DE MATRICES ELEMENTALES (ELENS)

La subrutina ELENS localiza la matriz de rigidez elemental del elemento en curso NEL almacenada en la matriz RIGEL y la suma "convenientemente" a la matriz global almacenada en el conjunto RIG. Ambos conjuntos RIG y RIGEL son traspasados a esta subrutina a través de la lista de argumentos. Estas matrices en la situación más general podrían ser matrices de rigidez, de masa o de cualquier otro tipo similar. En este caso y de acuerdo con la sentencia de llamada a ELENS desde el subprograma ENSAM, el conjunto RIGEL representa la matriz local a sumar booleanamente a la RIG o matriz global.

Para un mejor entendimiento de las operaciones a ser realizadas por el subprograma ELENS se supone en principio que la matriz global se almacena en el conjunto RIG según una matriz cuadrada, sin utilizar el esquema de simetría y banda que realmente posee. Se asume así mismo que la matriz elemental se almacena en la matriz totalmente llena: RIGEL. En este caso las o

peraciones requeridas para un elemento de NNE nudos (eventualmente distinto de 3) son indicados en el organigrama de la figura 5.9 que se comenta a continuación.

La variable entera I representa el índice de los distintos nudos del elemento. El mismo significado tiene, J. Cada combinación de I y J identifican a una submatriz "nodal" en RIGEL. Los índices I y J locales se corresponden con los N_1 y N_2 globales. Por tanto, cada combinación de N_1 y N_2 identifican a la submatriz nodal en la matriz de rigidez global RIG. Los índices J_1 y J_2 representarán el número de filas y de columnas que hay antes del primer coeficiente de la submatriz nodal correspondiente a los nudos N_1 y N_2 en la matriz RIG (ver figura 5.8). Los índices I_1 y I_2 son similares pero en la matriz elemental RIGEL.

Entonces para cada coeficiente de RIGEL cuyas posiciones sean la fila IF y la columna IC, es posible encontrar fácilmente la fila y la columna correspondiente JF y JC en RIG, permitiendo de esta forma añadir los coeficientes de RIGEL en el lugar apropiado de RIG (ver figura 5.8).

Ahora bien, con objeto de optimizar el almacenamiento de variables se ha aprovechado las características de simetría y banda de la matriz global. Usando un esquema de almacenamiento para matrices simétricas y bandeadas, sólo la parte triangular superior de la matriz global hasta el semiancho de la banda, se almacena en RIG. Consistentemente solo la parte triangular superior de la matriz elemental es considerada en RIGEL, aunque realmente se haya dimensionado como matriz cuadrada. (Ver figura 5.10).

Realizadas estas consideraciones, las operaciones a realizar por el subprograma ELENS pueden organizarse tal como muestra el organigrama en la figura 5.11.

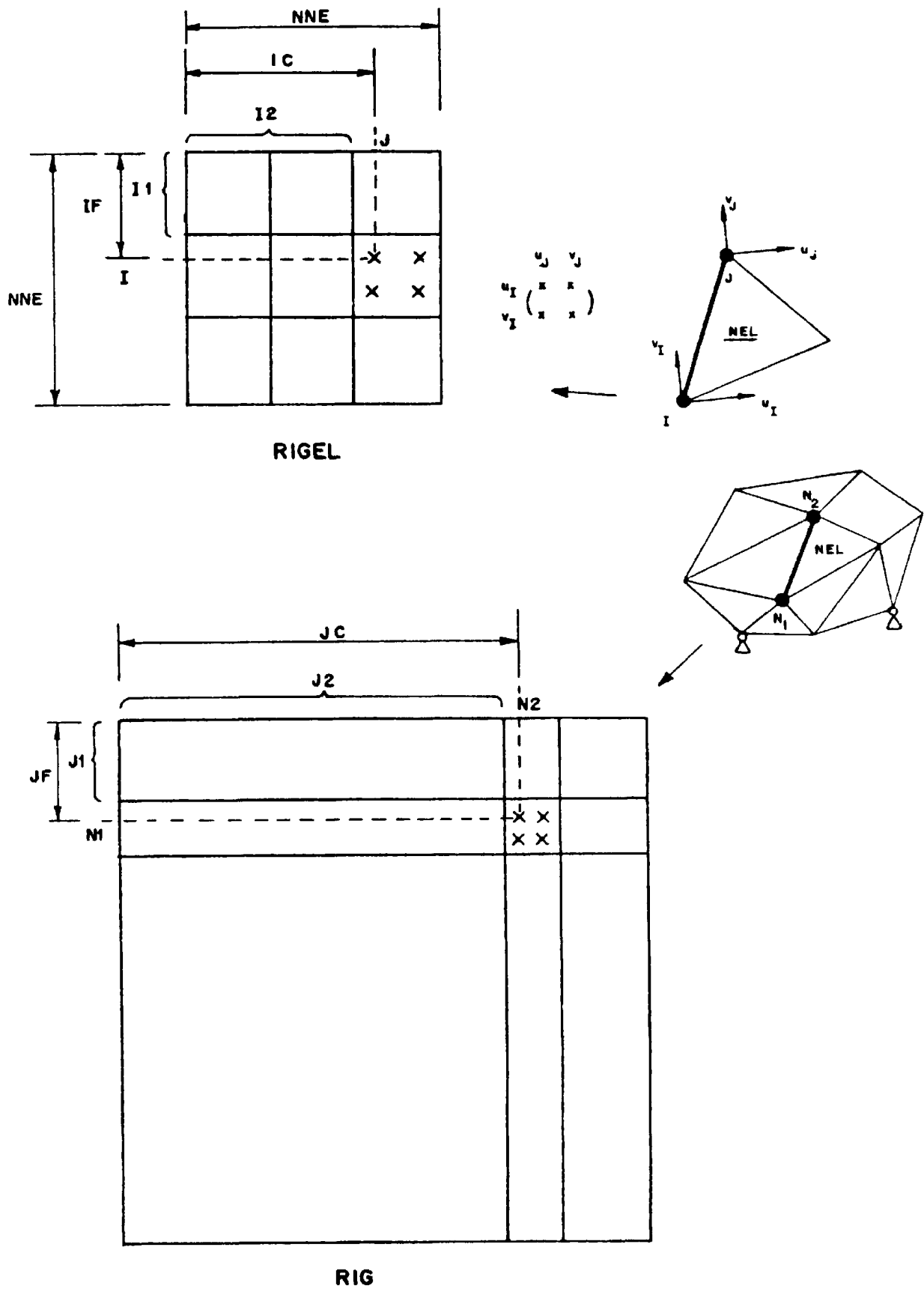


FIG. 5.8.- ESQUEMA DE ENSAMBLAJE

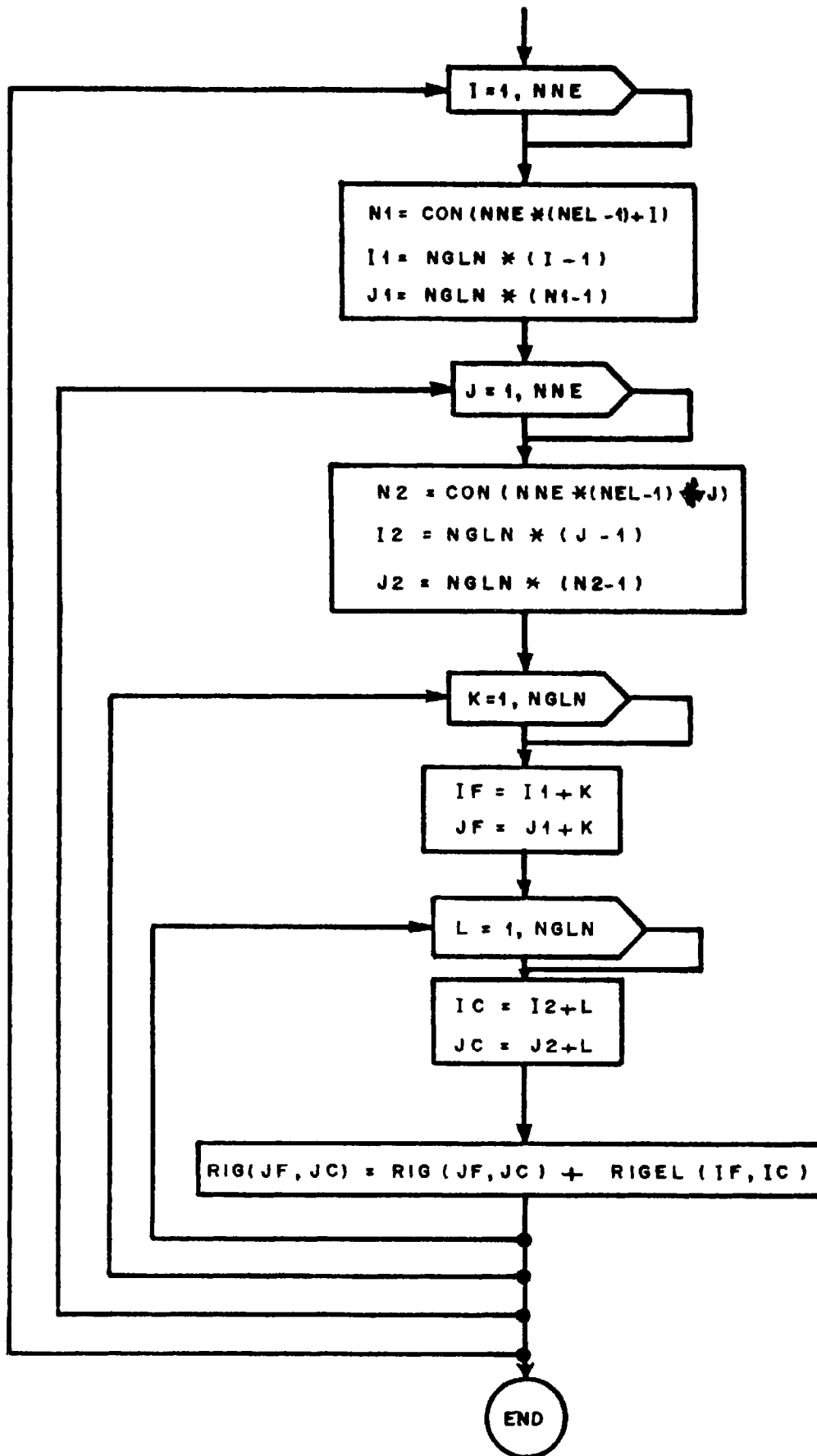


FIG. 5.9.- ORGANIGRAMA PARA ENSAMBLAR MATRICES, SIN APROVECHAR LAS CONDICIONES DE SIMETRIA Y ESTRUCTURA EN BANDA DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL

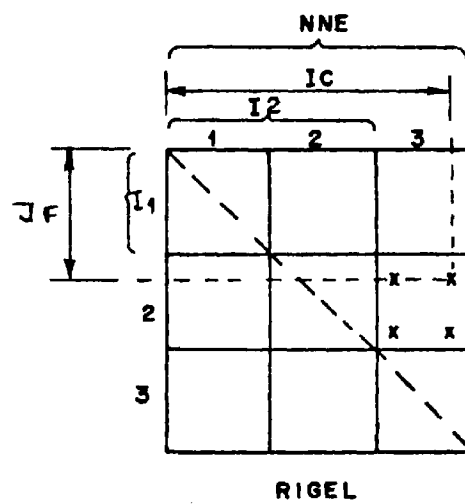
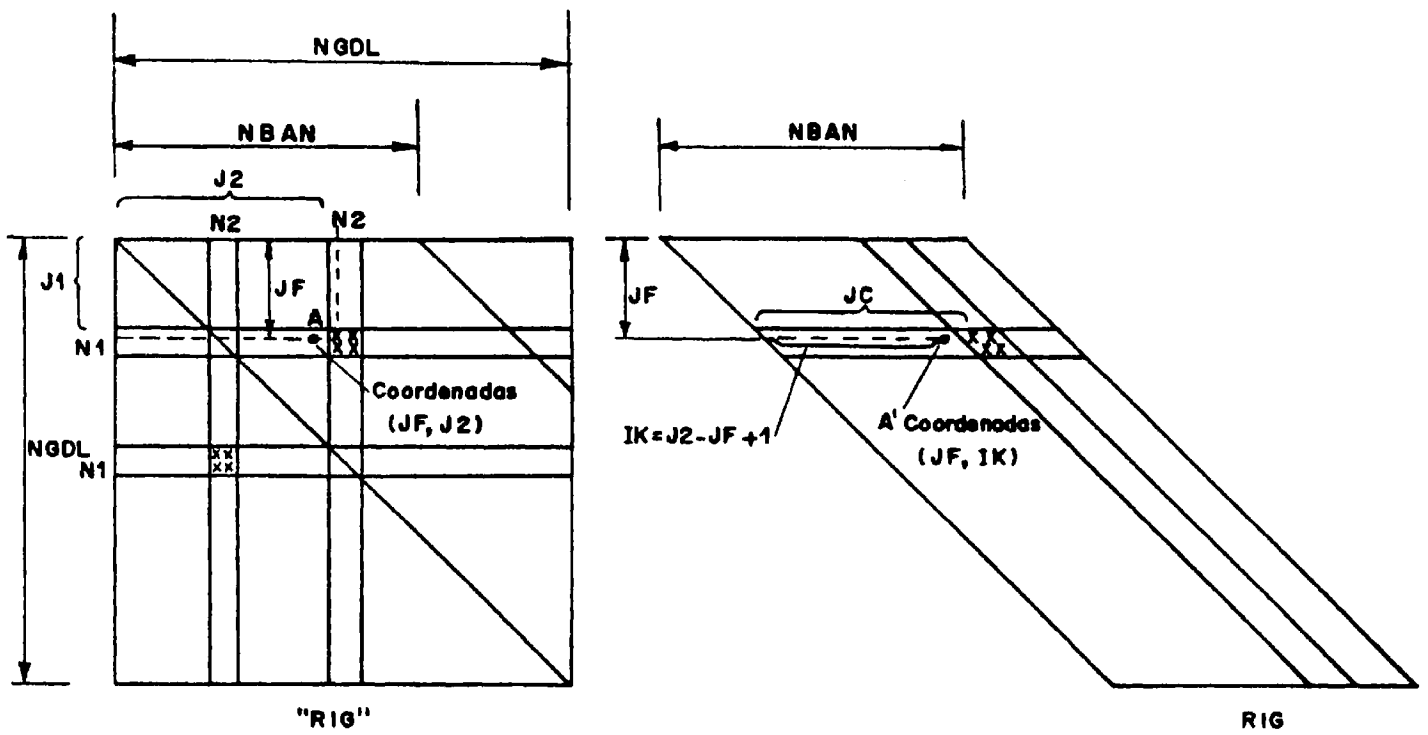


FIG. 5.10

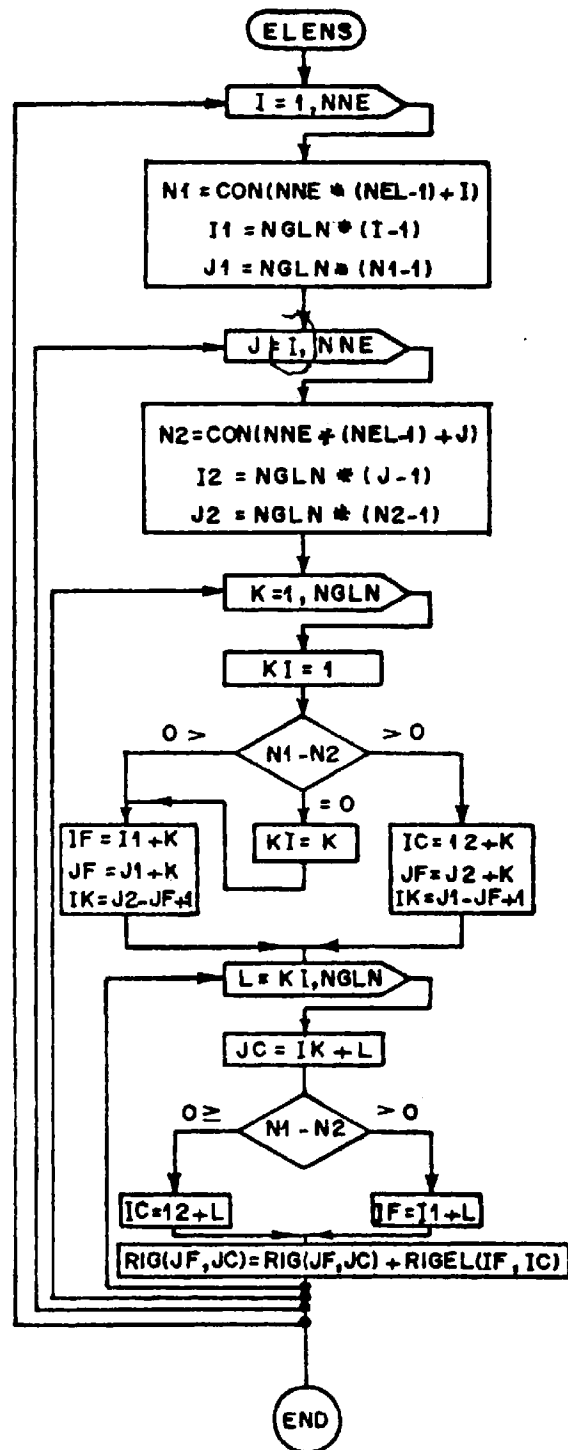


FIG. 5.11 .- ORGANIGRAMA PARA EL ENSAMBLAJE SEGUN EL ESQUEMA SIMETRICO Y EN BANDA DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL

Este organigrama comienza coincidiendo con el anterior (figura 5.9) hasta que en el bucle (DO en J) comienza en I en vez de 1. Con esta modificación se aprovecha la "simetría" de las matrices nodales $(N1, N2) \rightarrow (N2, N1)$ es decir, el hecho de que estas subrutinas sean transpuesta la una de la otra.

Es decir, como es preciso registrar solo en RIG la parte triangular superior de la matriz de rigidez global, únicamente se necesita sumar una de aquellas submatrices. En particular, si $N1 < N2$ se requiere $K_{N1, N2}^{NEL}$, mientras que si $N1 > N2$ se considera $K_{N2, N1}^{NEL}$. Por tanto antes de acumular los coeficientes de RIG, se compararan $N1$ y $N2$. Si $N1 < N2$ los coeficientes de $K_{N1, N2}^{NEL}$ se añaden directamente a RIG, calculando apropiadamente los índices de la fila y de la columna para el esquema en banda y simétrico. Conviene tener presente que un elemento ocupando la posición (I, J) se sitúa en la matriz bandeada y simétrica en la posición $(I, J-I+1)$.

Cuando $N1 = N2$ sólo es posible almacenar en RIG la parte superior de $K_{N1, N2}^{NEL}$. Finalmente, cuando ocurra $N1 > N2$ se intercambian los índices de las filas y columnas correspondientes, de forma que se registre en RIG la transpuesta de $K_{N1, N2}^{NEL}$.

Basados en el organigrama de la figura 5.11 la codificación en lenguaje FORTRAN se reproduce en el listado 5.3 que sigue:


```
C
C *****
C SUBROUTINE ELENB(NEL,CON,RIG,RIGEL)
C *****
C
C   ESTA RUTINA ENSAMBLA LA MATRIZ DE RIGIDEZ ELEMENTAL EN LA GLOBAL
C
C   COMMON MGD,MBAN,NGLE,NN,NE,NNC,NNB,NGLN,NNE,NGDL,NBAN,IN,IO,E,G
C   DIMENSION CON(*),RIG(200,40),RIGEL(6,6)
C
C   NEL = NUMERO DEL ELEMENTO
C   N1  = NUMERO DEL NUDO INICIAL
C   N2  = NUMERO DEL NUDO FINAL
C
C   L1=NNE*(NEL-1)
C   DO 50 I=1,NNE
C   L2=L1+I
C   N1=CON(L2)
C   I1=NGLN*(I-1)
C   J1=NGLN*(N1-1)
C   DO 50 J=1,NNE
C   L2=L1+J
C   N2=CON(L2)
C   I2=NGLN*(J-1)
C   J2=NGLN*(N2-1)
C   DO 50 K=1,NGLN
C   KI=1
C   IF (N1-N2) 20,10,30
C
C   ALMACENA SUBMATRIZ NODAL DIAGONAL
C
C   10 KI=K
C
C   ALMACENA SUBMATRIZ NODAL
C
C   20 IR=I1+K
C   JR=J1+K
C   IK=J2-JR+1
C   GOTO 40
C
C   ALMACENA TRANSPUESTA DE SUBMATRIZ NODAL
C
C   30 IC=I2+K
C   JR=J2+K
C   IK=J1-JR+1
C   40 DO 50 L=KI,NGLN
C   JC=IK+L
C   IF (N1-N2) 45,45,46
C   45 IC=I2+L
C   GOTO 50
C   46 IR=I1+L
C   50 RIG(JR,JC)=RIG(JR,JC)+RIGEL(IR,IC)
C   RETURN
C   END
```

5.4.- INTRODUCCION DE LAS CONDICIONES DE CONTORNO (BORDE)

5.4.1.- PLANTEAMIENTO TEORICO

Una vez formado el sistema general de ecuaciones lineales

$$\underline{K} \underline{U} = \underline{F} \quad [5.1]$$

o bien desarrollado en índices repetidos

$$K_{ij} U_j = F_i \quad [5.2]$$

se comprueba que la matriz de rigidez \underline{K} es singular debiendo introducirse las condiciones (cinemáticas) en movimientos de contorno de modo que se impidan movimientos de mecanismo (sólido rígido de la estructura).

En el capítulo 2 se insinuó un procedimiento para la consideración de los movimientos impuestos en el sistema (5.1). Sin embargo, el planteamiento de carácter formal allí comentado, no es adecuado para una aplicación en computador ya que supone una reorganización de la matriz y modificación (disminución) de su tamaño. Es más conveniente conservar la dimensión de la matriz, y reducir al mínimo el proceso de manipulación y reorganización de las matrices. Para ello, si se conserva en la memoria central, la matriz de rigidez \underline{K} y la de cargas \underline{F} , como ocurre en la programación que se está desarrollando, el método que se comenta a continuación es perfectamente válido y se implementa como subrutina del programa.

Para cada condición de borde $\underline{U}_k = \underline{U}_{k_0}$ correspondiente, a un movimiento especificado U_{k_0} en el gdl k , la matriz de rigidez y el vector de cargas se modifican como sigue:

La ecuación correspondiente a la fuerza F_k del grado de libertad k , que es una incógnita (reacción desconocida) se sustituye por

$$U_k = \bar{U}_{k_0} \quad [5.3]$$

y a los restantes ecuaciones se traspasa la incógnita U_k (de valor especificado) al segundo miembro, ya que es conocida, es decir:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N K_{ij} U_{ij} = F_i - K_{ik} \bar{U}_{k_0} \quad [5.4]$$

La ecuación (5.3) supone modificar la fila k de la matriz \underline{K} , de modo que todos sus términos sean nulos a excepción del correspondiente a la diagonal principal que es la unidad. El término k -simo del vector de resultados se sustituye por \underline{U}_{k_0} .

Por otra parte las restantes ecuaciones (5.4) implican añadir a cada elemento del vector de cargas un término igual al producto del coeficiente de la incógnita U_k de la ecuación (elemento de la columna k -sima de la matriz de rigidez) que se considera por el valor opuesto del movimiento especificado para el grado de libertad. Los coeficientes de columna k -sima de la matriz de rigidez se hacen nulos.

Procediendo de la forma indicada para cada condición de borde se obtiene el sistema modificado

$$\underline{\bar{K}} \underline{V} = \underline{\bar{F}} \quad [5.5]$$

o bien

$$\bar{K}_{ij} \bar{U}_L = \bar{F}_k \quad [5.6]$$

que conserva la simetría, ancho de banda y dimensión del sistema no modificado (5.1). Una vez resuelto el sistema modificado, se pueden determinar las reacciones incógnitas \bar{F}_k que aparecen en los gdl k coaccionados utilizando la ecuación k -sima primitiva, es decir:

$$K_k = K_{kj} \cdot U_j - F_k \quad [5.7]$$

Ello supone que si se desean obtener como resultados del cálculo las reacciones de apoyo, es preciso antes de proceder a la modificación de la matriz \underline{K} y el vector \underline{F} , conservar las filas y términos independientes correspondientes a los gdl coaccionados. Esta posibilidad no se ha considerado en el programa que se desarrolla.

Antes de comenzar a comentar la subrutina BORDE que produce la modificación de \underline{K} y \underline{F} en $\underline{\bar{K}}$ y $\underline{\bar{F}}$ respectivamente, conviene observar que se puede evitar para el caso frecuente $U_k = 0$ (soporte fijo) la modificación de los términos independientes distintos del k -simo. Basta imponer una condición de bifurcación y evitar entradas en el bucle o sentencia DO correspondiente.

5.4.2.- PROGRAMACION

Como en la subrutina anterior, se describe en principio -para así fa cilitar su entendimiento-, el caso en el que la matriz de rigidez "nodal" está totalmente almacenada en la matriz cuadrada RIG.

Las operaciones a seguir para la introducción de las condiciones de contorno están esquematizadas en el organigrama de la figura 5.12.

Se comienza con un bucle que se extiende a todos los nudos de borde. Para el nudo de borde L-ésimo se halla el índice que le corresponde y se almacena en el entero NO. El entero K1 expresa el número de filas en RIG antes de la primera fila correspondiente al primer gdl del nudo NO. Si es tá impuesta la componente I-ésima del desplazamiento del nudo NO, hecho que vendrá determinado por el indicador de borde IB correspondiente -que en éste caso valdrá 1-, entonces el vector VC de cargas se modifica restando las fuerzas generadas por el desplazamiento impuesto. Posteriormente se po nen a cero las filas y columnas de RIG correspondientes al grado de libertad prescrito, el elemento de la diagonal principal de RIG se pondrá sin em bargo, igual a 1, la componente prescrita se almacena en VC(KF) (con $KF=K1+I$, gdl en cuestión).

En el caso de almacenaje totalmente lleno de la matriz de rigidez el esquema de la puesta a cero de fila y columna KF, así como la modificación del vector VC se pone de manifiesto en la figura 5.13.

Ahora bien, si como es usual, se almacena únicamente la parte triangu-
lar superior de la matriz de rigidez simétrica y en banda para aprovechar las ven

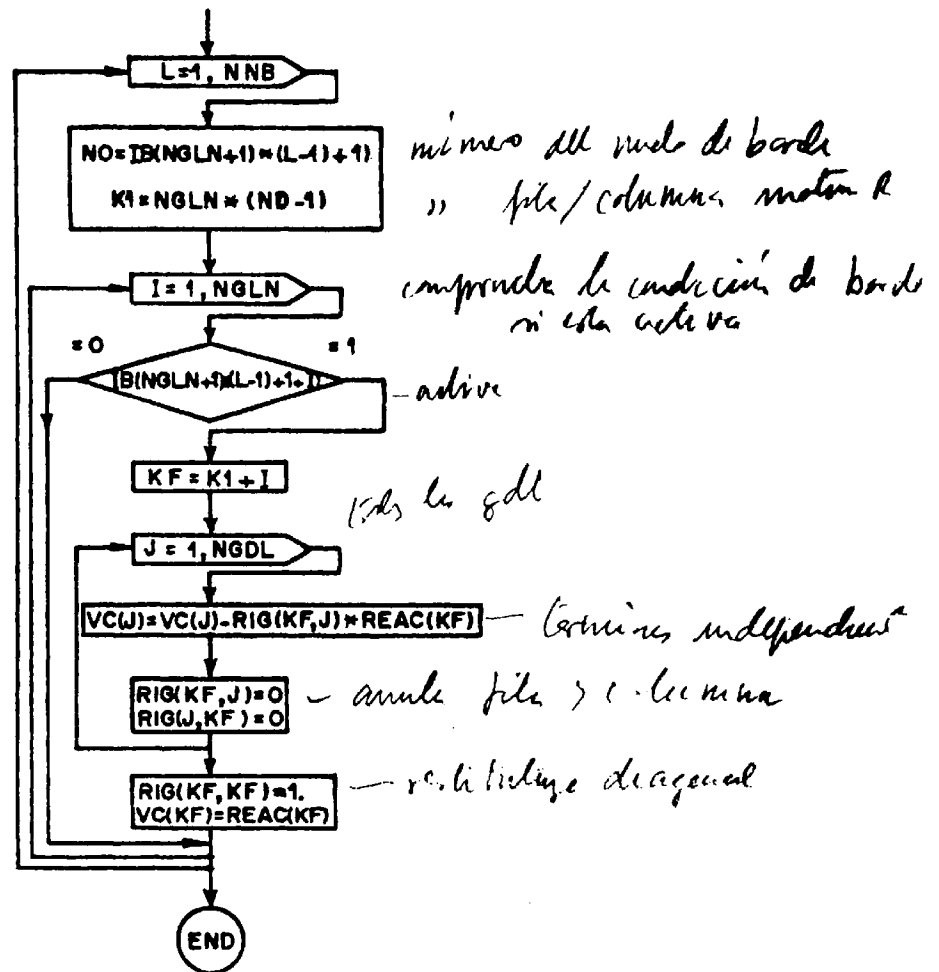


FIG. 5.12. - ORGANIGRAMA PARA LA INTRODUCCION DE LAS CONDICIONES DE CONTORNO EN EL CASO DE QUE LA MATRIZ "RIG" SEA CUADRADA Y TOTALMENTE LLENA

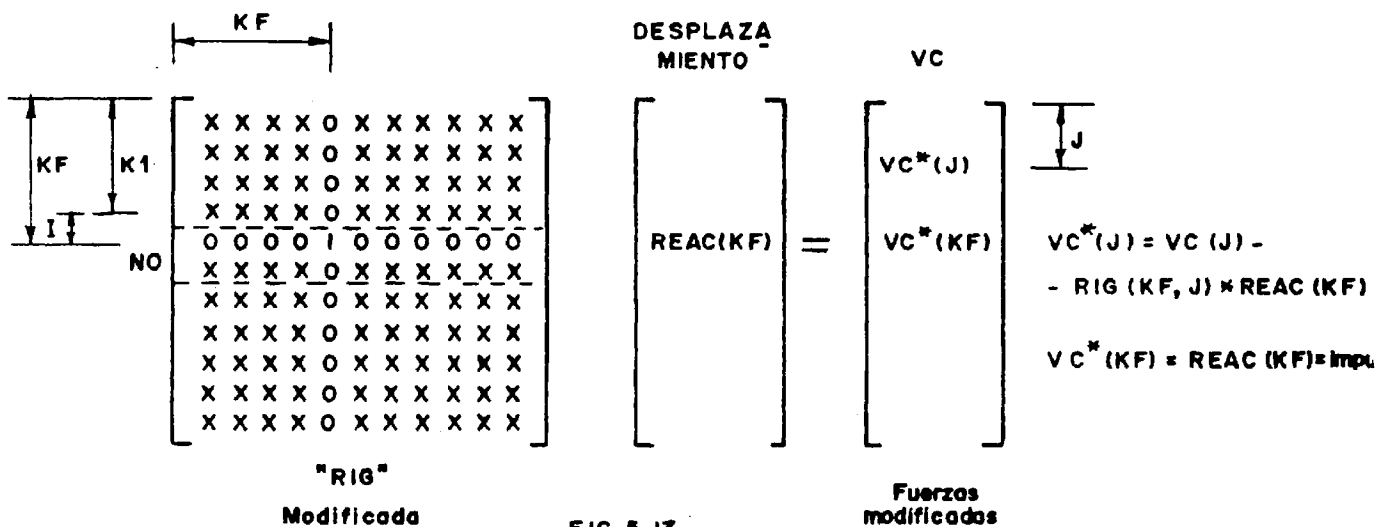


FIG. 5.13

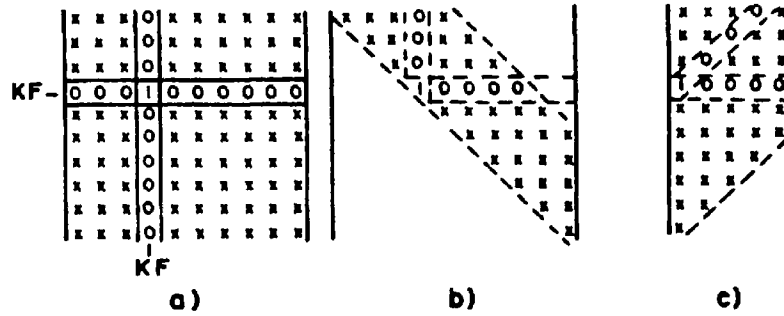


FIG. 5.14.- ESQUEMAS DE ALMACENAMIENTO DE "RIG"

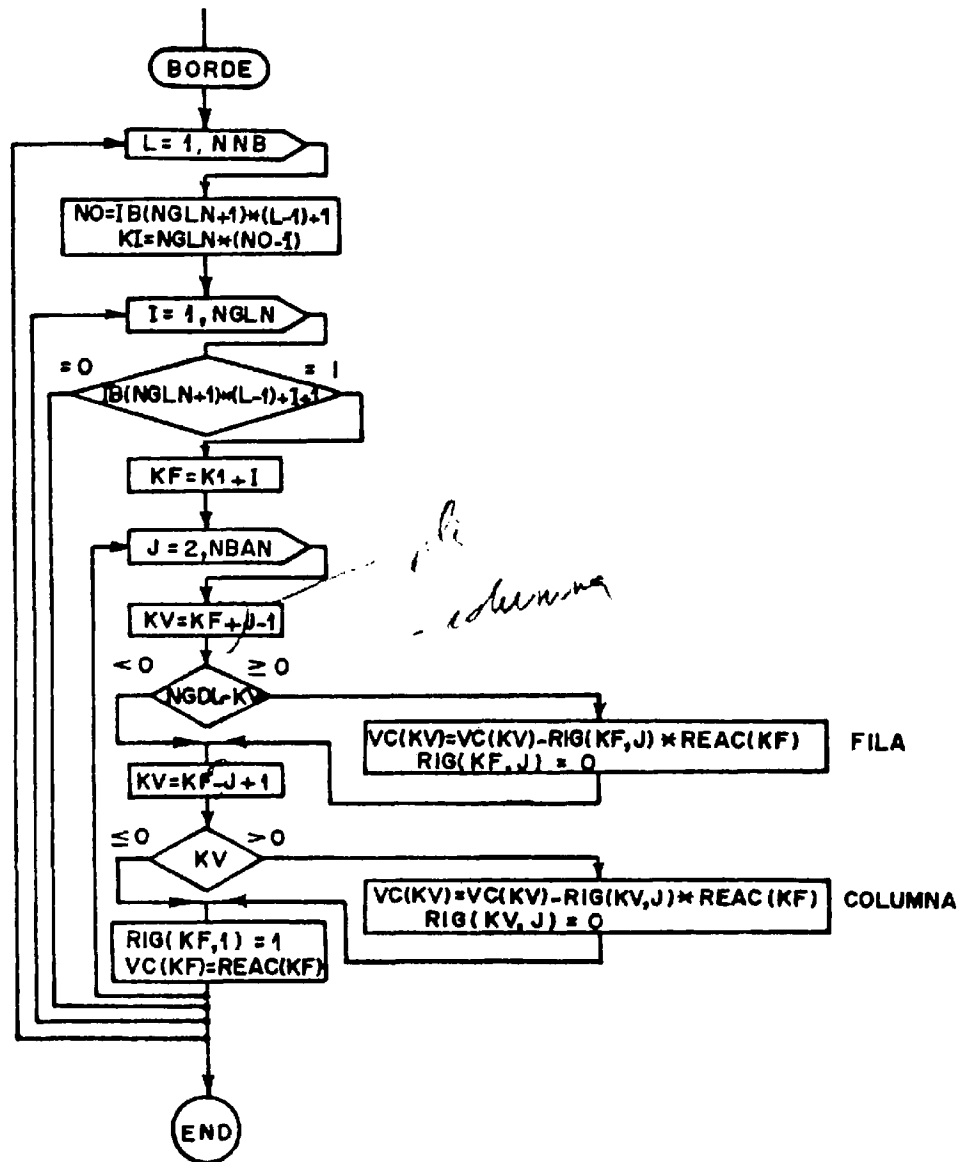


FIG. 5.15.- ORGANIGRAMA PARA LA INTRODUCCION DE LAS CONDICIONES DE CONTORNO, CUANDO LA MATRIZ DE RIGIDEZ "RIG" SE ALMACENA SEGUN EL ESQUEMA SIMETRICO Y BANDEADO DE LA FIG. 5.14.-

tajas de simetría y banda, esta situación se describe en la figura 5.14 donde se debe de poner a cero la parte de la columna por encima de la diagonal y la parte de la fila a la derecha de la diagonal.

Cuando se hace uso del esquema de almacenamiento simétrico y en banda de la matriz RIG, los coeficientes de las columnas son almacenados diagonalmente como muestra la figura 5.14c). Es importante a estos efectos observar que si un elemento en la matriz RIG de la figura 5.14c) tiene de "coordenada" (KF, J) en la matriz cuadrada de la figura 5.14a) le corresponderá la posición (KF, KV) con $KV = KF + J - 1$. Además cuando se inicialice a cero la fila KF -ésima deberá comprobarse que los índices de la columna no exceden del número total de ecuaciones como ocurriría para las últimas filas de la matriz. Semejantemente, al ponerse a cero la columna debe también efectuarse la comprobación de que los índices de la fila no lleguen a ser cero o menores como ocurriría para las primeras columnas de la matriz.

Teniendo en cuenta estas consideraciones se ha planteado el organigrama de la figura 5.15 siendo la codificación en lenguaje FORTRAN un sencillo ejercicio de adaptación de aquel organigrama. (Ver listado 5.4).

5.4.3.- POSIBLES DESARROLLOS

El procedimiento que se acaba de exponer, para la imposición de condiciones de contorno en los movimientos de una estructura, presenta cuando se aplica a problemas de gran tamaño, cuya matriz de rigidez debe de almacenarse en memoria externa y generalmente de un modo secuencial, una importante desventaja. El tiempo de computación aumenta extraordinariamente debido al elevado nú


```
C
C *****
C SUBROUTINE BORDE(RIG,VC,REAC,IB)
C *****
C
C INTRODUCCION DE LAS CONDICIONES DE CONTORNO
C
C COMMON MGD, MBAN, NGLE, NN, NE, NNC, NNB, NGLN, NNE, NGDL, NBAN, IN, IO, E, G
C DIMENSION VC(*), IB(*), REAC(*), RIG(200,40)
C
C DO 100 L=1,NNB
C L1=(NGLN+1)*(L-1)+1
C NO = NUMERO DEL NUDO CON CONDICION DE BORDE
C NO=IB(L1)
C K1=NGLN*(NO-1)
C DO 100 I=1,NGLN
C L2=L1+I
C IF (IB(L2)-1) 100, 10, 100
C
C INCOGNITAS PRESCRITAS A SER CONSIDERADAS
C
C COEFICIENTES DIAGONAL DE RIG=1
C SITUAR VALORES DE INCOGNITAS PRESCRITAS EN VC
C
10 KF=K1+I
C DO 50 J=2,NBAN
C KV=KF+J-1
C IF (NGDL-KV) 30, 20, 20
C
C MODIFICA FILA DE RIG Y CORRESPONDIENTE ELEMENTO EN VC
C
20 VC(KV)=VC(KV)-RIG(KF,J)*REAC(KF)
C RIG(KF,J)=0.
30 KV=KF+J+1
C IF (KV) 50, 50, 40
C
C MODIFICA COLUMNA DE RIG Y CORRESPONDIENTE ELEMENTO EN VC
C
40 VC(KV)=VC(KV)-RIG(KV,J)*REAC(KF)
C RIG(KV,J)=0.
50 CONTINUE
C RIG(KF,1)=1.
C VC(KF)=REAC(KF)
100 CONTINUE
C RETURN
C END
```

mero de llamadas de lectura y escritura a la memoria periférica que se precisa efectuar. En efecto, la búsqueda y posterior modificación de los elementos de una columna (o eventualmente fila) de la matriz, que no pueden ser almacenadas consecutivamente, exige que se efectue de un modo individual.

Es posible, a costa de un incremento de consultas en el programa, introducir las modificaciones en cada matriz elemental antes de su ensamblaje. De esta forma se podría contemplar situaciones de apoyos no concordantes, es decir, con movimientos especificados según direcciones no coincidentes con las de los ejes generales del cálculo. Bastaría en estos casos, llevar a cabo un cambio de ejes, en la matriz de rigidez de los elementos conteniendo el nudo con esa condición de borde.

Un método alternativo que obvia los problemas anteriores consiste en - sumar por un número elevado R únicamente el término de la diagonal K_{kk} y sumar el término independiente de la correspondiente ecuación al término $\bar{U}_{k_0} \cdot R$. De esta forma, de un modo aproximado (dentro de los límites de los errores de computación), se satisface la condición de borde (5.3), es decir:

$$U_k = \bar{U}_{k_0}$$

La matriz \bar{K} modificada sigue, mediante esta técnica, siendo simétrica, en banda y conserva su dimensión. Sin embargo, dependiendo de la magnitud de R , pueden aparecer problemas de estabilidad numérica en la resolución del sistema (5.5). Por ello este procedimiento es aconsejable en computadores con un tamaño de palabra elevado (32 ó 60 bits) ó bien con doble precisión. En cualquier caso el valor del número "infinito" R , debe ser experimentado en cada caso para cada computador.

En algunos programas de uso industrial existe un tipo especial de elemento denominado "elemento de borde", que consiste en añadir una rigidez determinada por el usuario a un grado de libertad especificado. En particular se utiliza una barra bajo esfuerzo axial o bien sometidas a torsión. Si las características de rigidez de la barra son elevadas (con un valor del movimiento inicial impuesto igual a \bar{U}_{k_0}) este procedimiento es idéntico al que se acaba de comentar, con las ventajas adicionales de suponer una interpretación física a las coacciones de contorno y permitir la imposición de condiciones no concordantes (basta definir la barra según la dirección de la coacción). El programa SAP hace uso de esta técnica.

Por último conviene indicar que existen numerosos tipos de condiciones cinemáticas susceptibles de imponer a una estructura. Algunas posibilidades pueden ser recogidas con una entrada de datos basadas en gdl como se ha indicado en 4.4. En otras situaciones, se pueden introducir coacciones cinemáticas del tipo general

$$\underline{C} \underline{U} = \underline{Q} \quad [5.8]$$

con \underline{C} y \underline{Q} matriz y vector conocidos.

La aplicación de la técnica de los multiplicadores de Lagrange, en la minimización de la funcional (energía) o bien el procedimiento de las funciones de penalización, constituyen dos procedimientos comunmente usados.

En el primer caso se deduce la funcional a minimizar de la estructura:

$$\Pi_p = \frac{1}{2} \underline{U}^T \underline{K} \underline{U} - \underline{U}^T \underline{F} + \underline{\lambda}^T [\underline{C} \underline{U} - \underline{Q}] \quad [5.9]$$

cuya condición de estacionaridad exige la resolución de un sistema simétrico, semipositivo definido, pero con mayor dimensión y con la estructura en banda, que posee el sistema (5.5).

En efecto, se obtiene de las condiciones:

$$\frac{\partial \pi_p}{\partial \underline{\lambda}} = 0 ; \quad \frac{\partial \pi_p}{\partial \underline{U}} = 0$$

el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} \underline{K} & \underline{C} \\ \underline{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U} \\ \underline{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{F} \\ \underline{Q} \end{bmatrix} \quad [5.10]$$

El vector puede ser interpretado como las reacciones que se imponen a los movimientos coaccionados según la expresión (5.8).

La aplicación de la técnica de penalización supone introducir el vector error de la coacción

$$\underline{e} = \underline{C} \underline{U} - \underline{Q}$$

La energía potencial total del sistema se escribe, como es usual, con la inclusión del término adicional de penalización

$$\underline{e}^T \underline{\alpha} \underline{e}$$

con $\underline{\alpha}$ una matriz diagonal de números grandes de penalización, es decir:

$$\pi_p = \frac{1}{2} \underline{U}^T \underline{K} \underline{U} - \underline{U}^T \underline{F} + \frac{1}{2} \underline{e}^T \underline{\alpha} \underline{e} \quad [5.11]$$

La condición de estacionaridad de Π_p implica:

$$\frac{\partial \Pi_p}{\partial \underline{U}} = \underline{0}$$

Resulta el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

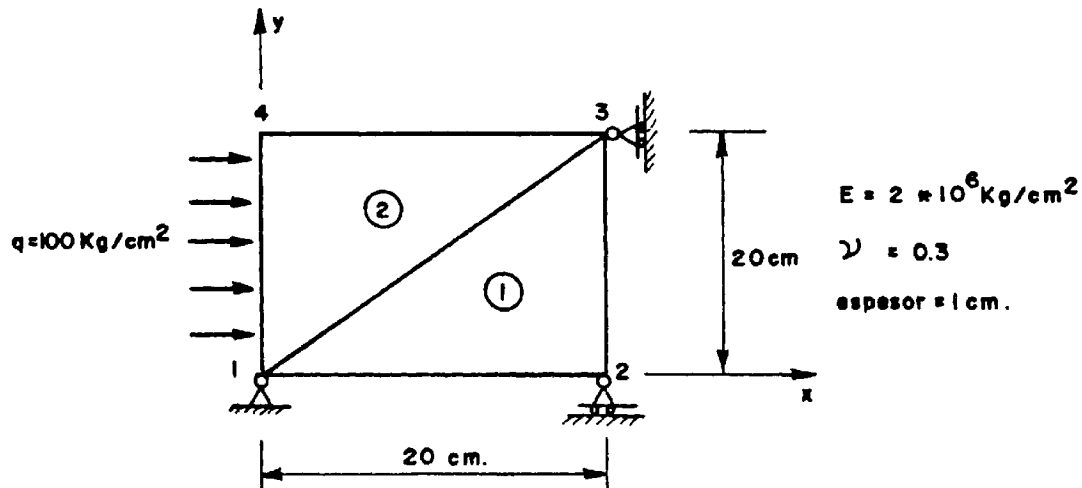
$$(\underline{K} + \underline{C}^T \underline{\alpha} \underline{C}) \underline{U} = \underline{F} + \underline{C}^T \underline{\alpha} \underline{Q} \quad [5.12]$$

La ventaja principal de la expresión (5.12) reside en que tanto la dimensión de la matriz resultante así como su carácter positivo definido no se modifican en relación a (5.5). Sin embargo, problemas de estabilidad numérica pueden aparecer para valores elevados de $\underline{\alpha}$ o si estos son bajos, la condición (5.8) no se satisficará con la exactitud precisa.

Se observa que el procedimiento expuesto anteriormente, que utiliza el programa SAP, y que hace uso de elementos de borde, constituye un caso particular de esta técnica general de la función de penalización.

CAPITULO 5.- EJERCICIOS

5.1. Como repaso de todo el Capítulo 5, se sugiere el desarrollo "manual" del ejemplo de tensión plana que se indica en la figura:



Se comenzará hallando la matriz de rigidez de cada uno de los dos elementos así como las fuerzas equivalentes en los nudos 1 y 4 a la presión q . A continuación se ensamblan estas matrices y vectores. Antes de pasar a resolver el sistema $\underline{K} \underline{U} = \underline{F}$, se imponen las condiciones de borde con lo que el sistema se reduce a 4 ecuaciones efectivas, fáciles de resolver; debiendo resultar las siguientes componentes de los desplazamientos no impuestas:

$$u_2 = 0.3049 \times 10^{-4} \text{ cm}; \quad v_3 = -0.1372 \times 10^{-3} \text{ cm}; \quad u_4 = 0.9015 \times 10^{-3} \text{ cm}; \quad v_4 = 0.2985 \times 10^{-3}$$

Finalmente se hallan las tensiones constantes en cada elemento y para que sirva de comparación se indica que $(\sigma_x)_{\text{elemento 2}} = -85.93 \text{ Kg/cm}^2$.

Las tensiones nodales promediadas en los nudos se obtienen inmediatamente de los valores anteriores, resultando por ejemplo $(\sigma_x)_{\text{nudo 3}} = -43.55 \text{ Kg/cm}^2$.

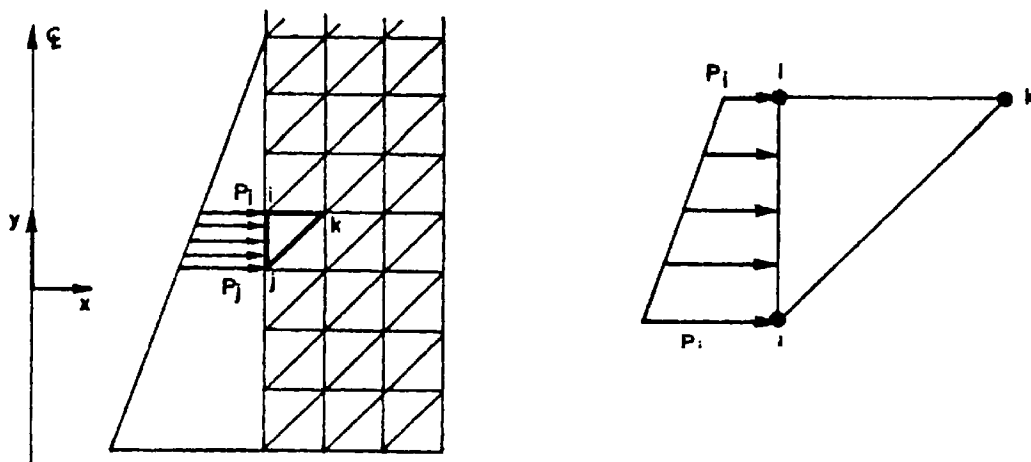
Es evidente que estos resultados estarán muy alejados de los reales, dada la sencilla discretización realizada.

- 5.2. Comprobar que en el caso del triángulo de 4 nudos (CT) de espesor constante y en el caso de tensión plana el vector de fuerzas equivalente en los nudos a un incremento uniforme de $\underline{t^a}$ es:

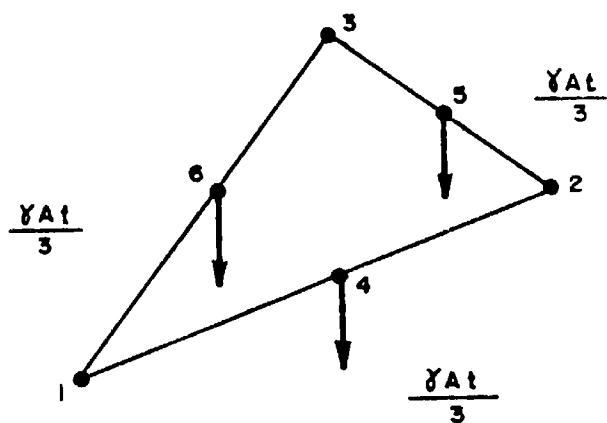
$$F_{\Delta t^a}^e = \begin{Bmatrix} f_{xi} \\ f_{yi} \\ f_{xj} \\ f_{yj} \\ f_{xk} \\ f_{yk} \end{Bmatrix} = \frac{E\alpha \cdot \Delta t^a \cdot t}{2(1-\nu)} \begin{Bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ a_3 \\ b_3 \end{Bmatrix}$$

Donde α es el coeficiente de dilatación y \underline{t} es el espesor del elemento.

- 5.3. Determinar las fuerzas consistentes en los nudos del elemento CT, debidas a una presión hidrostática sobre uno de sus lados, tal como se indica en la figura que sigue.



5.4. Comprobar que en el caso del triángulo de 6 nudos indicado en la figura, denominado también de deformación lineal (LT), el peso propio del elemento equivale a tres fuerzas iguales aplicadas en los nudos situados en los puntos medios de los lados:



γ = PESO ESPECIFICO

A = AREA DEL ELEMENTO

t = ESPESOR DEL ELEMENTO

CAPITULO 6.- RESOLUCION DE UN SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

6.1.- INTRODUCCION

Una vez que se han introducido las condiciones de contorno, el siguiente problema que se plantea es la obtención de los desplazamientos, es decir, resolver el sistema de ecuaciones $\underline{k} \underline{U} = \underline{F}$ y obtener así las incógnitas básicas (movimientos) \underline{U} .

Se trata pues -y utilizando una notación más usual-, de hallar las incógnitas x_1, x_2, \dots, x_n del sistema lineal

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n &= b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n &= b_2 \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + a_{nn} x_n &= b_n \end{aligned} \quad [6.1a]$$

que se puede escribir así:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad \text{con } i = 1, \dots, n \quad [6.1b]$$

o en forma matricial $\underline{A} \underline{x} = \underline{B}$

Se repasan en este capítulo varios métodos directos como son los de eliminación de Gauss, el de tridiagonalización de Choleski y una mención a otros como son las técnicas frontales de resolución del sistema en un programa de elementos finitos. Asimismo, se analizan los métodos iterativos como el de relajación, el de Gauss-Seidel y el de sobrerelajación.

6.2.- SOLUCION DE UN SISTEMA DE ECUACIONES POR EL METODO DE ELIMINACION DE GAUSS

6.2.1.- EXPOSICION TEORICA

Para una mejor comprensión del método se comienza con el sencillo ejemplo de un sistema de tres ecuaciones y otras tantas incógnitas:

$$\begin{aligned} 6x_1 + 3x_2 + 6x_3 &= 30 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 17 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 11 \end{aligned} \quad [6.2]$$

Dividiendo la primera ecuación por 6:

$$\text{resulta } \left\{ \begin{aligned} x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3 &= 5 \\ 2x_2 + x_3 &= 7 \\ \frac{3}{2}x_2 + x_3 &= 6 \end{aligned} \right. \rightarrow \boxed{x_1 = 5 - \frac{1}{2}x_2 - x_3} \quad \begin{array}{l} \text{sustituyendo ésta en las} \\ \text{siguientes 2ª y 3ª ecua-} \\ \text{ción} \end{array}$$

[6.3 a]

Dividiendo la segunda ecuación por 2:

$$\text{resulta } \left\{ \begin{aligned} x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3 &= 5 \\ x_2 + \frac{1}{2}x_3 &= \frac{7}{2} \\ \frac{1}{4}x_3 &= \frac{3}{4} \end{aligned} \right. \rightarrow \boxed{x_2 = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}x_3} \quad \begin{array}{l} \text{sustituyendo ésta en la} \\ \text{siguiente 3ª ecuación} \end{array}$$

[6.3 b]

Dividiendo la tercera ecuación por $\frac{1}{4}$

$$\left\{ \begin{aligned} x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3 &= 5 \\ x_2 + \frac{1}{2}x_3 &= \frac{7}{2} \\ \boxed{x_3} &= \boxed{3} \end{aligned} \right. \quad [6.4]$$

Encontrada la última incógnita $x_3 = 3$ mediante (6.3c) y sustituyendo es ta en (6.3b), $x_2 = \frac{7}{2} - \frac{3}{2} = 2$ y en (6.3a) $x_1 = 5 - 1 \cdot 3 = 1$ se obtienen las incógnitas mediante un proceso denominado sustitución hacia atrás.

Cabe observar que el sistema final ~~6.4~~ en que queda transformado el original es un sistema triangular con coeficientes en la diagonal igual a la u nidad y que por tanto el determinante de los coeficientes vale 1. Ahora bien el sistema original fue dividido en la primera fila por 6, en la segunda por 2 y en la tercera y última, por $1/4$, luego el determinante original será $-6 \times 2 \times \frac{1}{4}$, resultando el valor 3. Es decir, $|A| = \prod_{i=1}^n d_i$ donde los d_i son los divisores de cada una de las filas en el proceso de eliminación.

En este ejemplo se puede ver que en cada etapa de eliminación se requiere re dividir los elementos de una fila por el elemento de la diagonal. Si el e lemento de la diagonal fuera nulo, la división no podría realizarse y el siste ma no podría ser resuelto. Es por esto por lo que surgen unas técnicas de intercambio de filas para conseguir en cada etapa de eliminación elementos diagonales no nulos.

Ahora bien, en muchos problemas de ingeniería los elementos de la diagonal del sistema que los rige nunca son nulos por lo que en el proceso de elimi nación no será necesario modificar el esquema inicial. Tal es el caso de las matrices definidas positivas, como es la correspondiente al sistema (6.2)(*).

NOTA(*): Sin embargo, pueden presentarse matrices que sean asimétricas o indefinidas cuando la formulación en elementos finitos se base en un princi pío variacional mixto o en algún método de residuos ponderados en cuyo caso aparecen las situaciones citadas.

Una vez desarrollado el sencillo ejemplo inicial, se va ahora a describir el proceso de eliminación de Gauss con más generalidad.

Se considera el sistema:

$$\begin{aligned} a_{11}^{\circ} x_1 + a_{12}^{\circ} x_2 + a_{13}^{\circ} x_3 + \dots + a_{1n}^{\circ} x_n &= b_1^{\circ} \\ a_{21}^{\circ} x_1 + a_{22}^{\circ} x_2 + a_{23}^{\circ} x_3 + \dots + a_{2n}^{\circ} x_n &= b_2^{\circ} \\ \vdots & \\ a_{n1}^{\circ} x_1 + a_{n2}^{\circ} x_2 + a_{n3}^{\circ} x_3 + \dots + a_{nn}^{\circ} x_n &= b_n^{\circ} \end{aligned} \quad [6.5]$$

donde el superíndice "o" indica que los coeficientes a_{ij}° son los originales.

Se comienza por dividir la primera fila por a_{11}° obteniendo:

$$\begin{aligned} x_1 + a_{12}^1 x_2 + a_{13}^1 x_3 + \dots + a_{1n}^1 x_n &= b_1^1 \\ \text{donde } a_{ij}^1 &= a_{ij}^{\circ} / a_{11}^{\circ} \quad j = 2, \dots, n \\ b_1^1 &= b_1^{\circ} / a_{11}^{\circ} \end{aligned} \quad [6.6]$$

De un modo semejante al ejemplo inicial se puede eliminar la incógnita x_1 de las restantes ecuaciones con lo cual se modifican de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} a_{22}^1 x_2 + a_{23}^1 x_3 + \dots + a_{2n}^1 x_n &= b_2^1 \\ \vdots & \\ a_{n2}^1 x_2 + a_{n3}^1 x_3 + \dots + a_{nn}^1 x_n &= b_n^1 \end{aligned} \quad [6.7]$$

donde los coeficientes modificados son:

$$\left. \begin{aligned} a_{ij}^1 &= a_{ij}^{\circ} - a_{i1}^{\circ} a_{1j}^1 \\ b_i^1 &= b_i^{\circ} - a_{i1}^{\circ} b_1^1 \end{aligned} \right\} \text{ con } i, j = 2, \dots, n \quad [6.8]$$

Un procedimiento similar se usará para eliminar la incógnita x_2 del sistema 6.7.

Extrapolando lo dicho hasta ahora, se deduce que el algoritmo general para la eliminación de x_k puede ser el siguiente:

$$\left. \begin{aligned} a_{kj}^k &= a_{kj}^{k-1} / a_{kk}^{k-1} \\ b_k^k &= b_k^{k-1} / a_{kk}^{k-1} \end{aligned} \right\} j = k+1, \dots, n$$

$$\left. \begin{aligned} a_{ij}^k &= a_{ij}^{k-1} - a_{ik}^{k-1} a_{kj}^k \\ b_i^k &= b_i^{k-1} - a_{ik}^{k-1} b_k^k \end{aligned} \right\} i, j = k+1, \dots, n$$
[6.9]

Una vez que el procedimiento ha sido aplicado $(n-1)$ veces, la última ecuación del sistema se reduce a:

$$a_{nn}^{n-1} x_n = b_n^{n-1} \quad [6.10]$$

de la cual se deduce inmediatamente

$$x_n = \frac{b_n^{n-1}}{a_{nn}^{n-1}} \quad [6.11]$$

Una vez que el proceso de eliminación se ha completado, el sistema de ecuaciones original se ha transformado en un sistema supertriangular con elementos unidad en la diagonal principal. La forma general de la fila k es ahora

$$x_k + a_{k,k+1}^k x_{k+1} + \dots + a_{k,n}^k x_n = b_k^k$$

La incógnita x_n se calcula mediante (6.11), y a partir de ella es posible hallar las restantes incógnitas x_{n-1}, x_{n-2}, \dots en un proceso de sustitución en orden inverso mediante la fórmula:

$$x_k = b_k - \sum_{j=k+1}^n a_{kj} x_j \quad [6.12]$$

6.2.2.- RUTINA SOLV1, MATRICES GENERALES

El método de eliminación de Gauss admite una sencilla programación numérica tal como se indica en el organigrama de la figura 6.1, el cual en es en cia se basa en el algoritmo dado por las fórmulas 6.9.

El proceso de eliminación se extiende mediante un bucle a la ecuación k . En principio se comprueba la posibilidad de encontrar un elemento nulo en la diagonal, en cuyo caso el programa se detiene dando mensaje de singularidad de la matriz.

En caso contrario, los elementos de la fila k y la componente k -ésima de \underline{B} (recordar $\underline{Ax}=\underline{B}$) se dividen por el elemento de la diagonal de aquella fila.

Una vez efectuado este cálculo, la incógnita x_k se elimina de las ecuaciones restantes, es decir, desde la $k+1$ a la n . Este proceso se repite hasta completar el bucle, es decir, hasta que se triangulariza el sistema.

Después de comprobar que el coeficiente de la diagonal de la última fila es no nulo, se obtiene la incógnita x_n y se almacena en la última compo-

```
C
C
C *****
C SUBROUTINE SOLV1(A,B,D,N,NX)
C *****
C
C SOLUCION DE UN SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES POR EL METODO
C DE ELIMINACION DE GAUSS,SIN REALIZAR INTERCAMBIO DE FILAS.
C
C A   = MATRIZ DE LOS COEFICIENTES DEL SISTEMA
C B   = ORIGINALMENTE CONTIENE LOS TERMINOS INDEPENDIENTES;DES -
C       PUES DE RESUELTO EL SISTEMA CONTIENE LOS VALORES DE LAS
C       INCOGNITAS HALLADAS
C NX  = DIMENSIONES MAXIMAS DE A Y B
C N   = DIMENSIONES DE A Y B
C D   = DETERMINANTE DE LA MATRIZ A
C
C   DIMENSION A(NX,NX),B(NX)
C   N1=N-1
C   DO 100 K=1,N1
C     C=A(K,K)
C     K1=K+1
C     IF (ABS(C)-0.000001)1,1,3
C 1   WRITE(*,2) K
C 2   FORMAT('**** SINGULARIDAD EN FILA',I5)
C     D=0.
C     GOTO 300
C
C   DIVIDE FILA POR ELEMENTO DIAGONAL
C
C 3   DO 4 J=K1,N
C 4   A(K,J)=A(K,J)/C
C     B(K)=B(K)/C
C
C   ELIMINA LA INCOGNITA X(K) DE LA FILA I (CON I=K+1,..N)
C
C   DO 10 I=K1,N
C     C=A(I,K)
C     DO 5 J=K1,N
C 5   A(I,J)=A(I,J)-C*A(K,J)
C 10  B(I)=B(I)-C*B(K)
C 100 CONTINUE
C     IF (ABS(A(N,N))-0.000001)1,1,101
C
C   CALCULA ULTIMA INCOGNITA
C
C 101 B(N)=B(N)/A(N,N)
C
C   PROCESO DE RESUSTITUCION PARA CALCULO DE INCOGNITAS RESTANTES
C
C   DO 200 I=1,N1
C     K=N-I
C     K1=K+1
C     DO 200 J=K1,N
C 200 B(K)=B(K)-A(K,J)*B(J)
C
C   CALCULO DEL DETERMINANTE
C
C   D=1.
C   DO 250 I=1,N
C 250 D=D*A(I,I)
C 300 RETURN
C   END
```

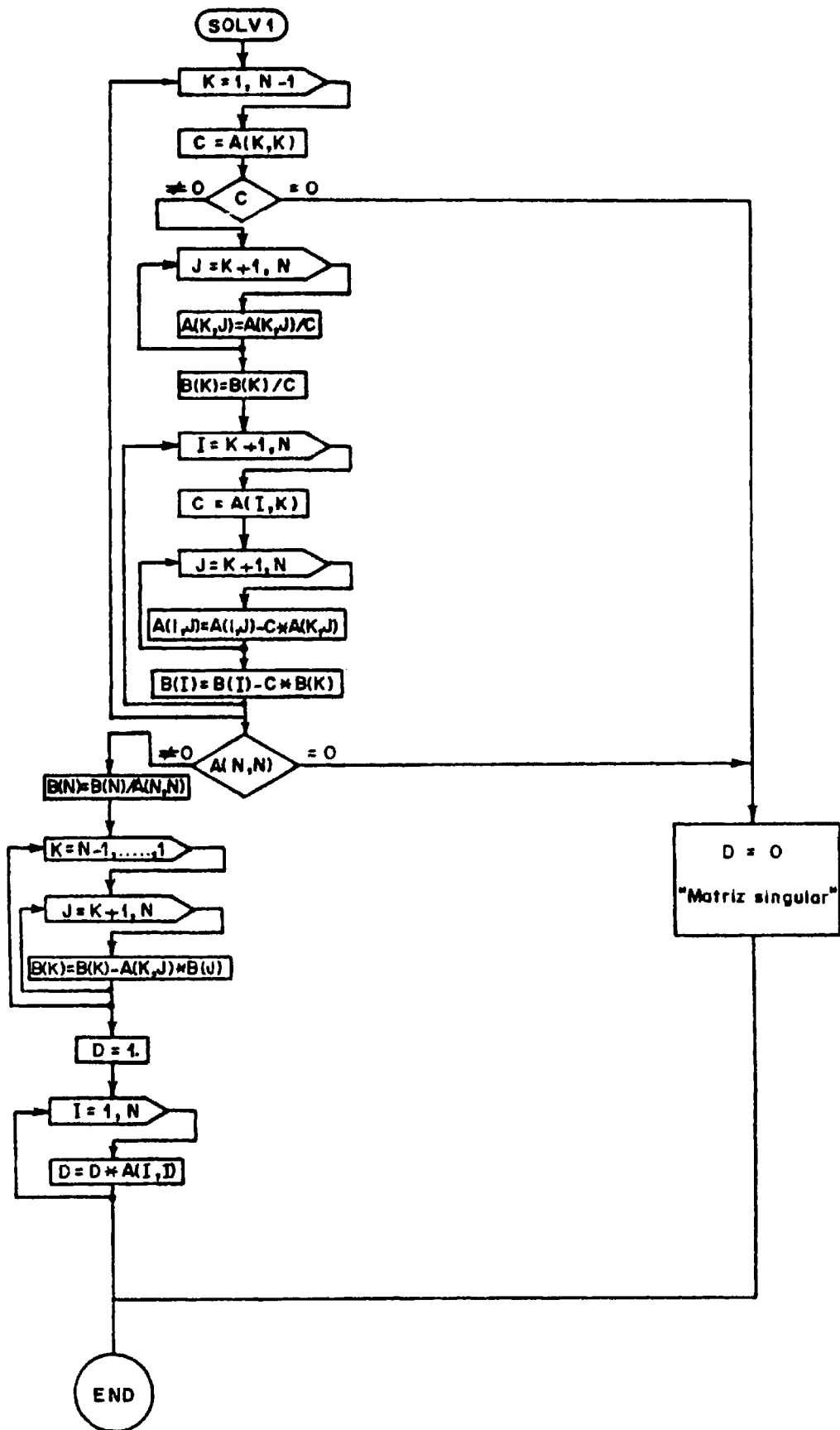


FIG. 6.1. - ORGANIGRAMA PARA RESOLUCION DE SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES POSITIVO DEFINIDO

nente del vector B . Sigue el proceso de sustitución hacia atrás para calcular las restantes incógnitas en orden inverso, almacenandolas también en el vector B (según fórmula 6.12).

Finalmente, el valor del determinante de la matriz del sistema se deduce simplemente multiplicando los coeficientes de la diagonal de la matriz transformada A , los cuales contienen los divisores de cada fila.

Es importante observar que la matriz original del sistema es destruida después del proceso de eliminación de Gauss. Sería necesario si se desea conservarla en el computador utilizar un conjunto auxiliar antes de comenzar el algoritmo de Gauss. Idéntica situación ocurre con el vector de los términos independientes que se destruye al almacenar en él precisamente las incógnitas x_i obtenidas.

El organigrama de la figura 6.1 se transforma muy fácilmente en código FORTRAN tal como se muestra en la rutina que se incluye (SOLV1). (Ver listado 6.1).

6.2.3.- RUTINA SOLVE. MATRICES SIMÉTRICAS Y EN BANDA

Cuando la matriz de los coeficientes es simétrica y dispuesta en banda la organización simétrica y en banda de la misma (figura 6.2b), representa un ahorro importante frente a la utilización de la organización convencional (figura 6.2a).

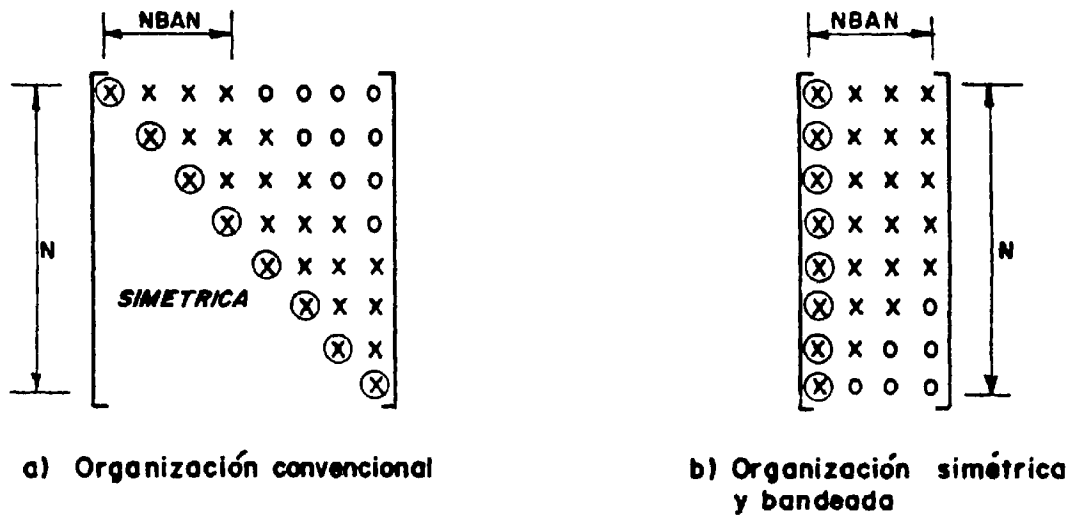


FIG. 6.2

Si se tiene en cuenta que un coeficiente de la organización convencional a) de coordenadas (I, J) tiene en la nueva organización b) las coordenadas $(I, J-J+1)$ el organigrama para el caso simétrico y en banda consiste en cambiar las columnas en la figura 6.1 obteniéndose el esquema de paso de la figura 6.3.

También los límites de algunos lazos se alteran para operar sólo dentro de la banda. El valor del determinante no se calcula. El organigrama de la figura 6.4, permite de manera muy cómoda el paso a la rutina SOLVE en lenguaje FORTRAN tal como se muestra en páginas posteriores. (Ver listado 6.2).

6.3.- INVERSA DE UNA MATRIZ POR EL PROCEDIMIENTO DE ELIMINACION DE GAUSS (INVER)

Si se desea resolver un sistema de ecuaciones $\underline{A}\underline{x} = \underline{B}$ realizando un proceso de inversión: $\underline{x} = \underline{A}^{-1}\underline{B}$, la forma más sencilla de obtener la inversa \underline{A}^{-1} de una matriz, $\underline{A}(n \times n)$ consiste en resolver los n sistemas de ecuaciones cuyos términos independientes son respectivamente:

```
C
C *****
C SUBROUTINE SOLVE(A,B,D,N,NBAN,NX,MX)
C *****
C
C     SOLUCION DE UN SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES POR EL METODO
C     DE ELIMINACION DE GAUSS, PARA SISTEMAS SIMETRICOS Y EN BANDA
C
C     A   = CONJUNTO QUE CONTIENE LA MATRIZ TRIANGULAR SUPERIOR, AL -
C           MACENADO DE ACUERDO AL ESQUEMA SIMETRICO Y BANDEADO
C     B   = ORIGINALMENTE CONTIENE LOS TERMINOS INDEPENDIENTES; DES -
C           PUES DE RESUELTO EL SISTEMA CONTIENE LOS VALORES DE LAS
C           INCOGNITAS HALLADAS
C
C     N    = NUMERO DE INCOGNITAS
C     NBAN = SEMIANCHO DE BANDA
C     NX   = NUMERO MAXIMO DE FILAS DE A Y B
C     MX   = NUMERO MAXIMO DE COLUMNAS DE A
C     D    = VECTOR AUXILIAR
C
C     DIMENSION A(NX,MX),B(NX),D(MX)
C     N1=N-1
C     DO 100 K=1,N1
C       C=A(K,1)
C       K1=K+1
C       IF(ABS(C)-0.000001)1,1,3
C 1    WRITE(*,2)K
C 2    FORMAT('**** SINGULARIDAD EN FILA',I5)
C       GOTO 300
C
C     DIVIDE FILA POR ELEMENTO DIAGONAL
C
C 3    NI=K1+NBAN-2
C       L=MIN0(NI,N)
C       DO 11 J=2,NBAN
C 1    D(J)=A(K,J)
C       DO 4 J=K1,L
C       K2=J-K+1
C 4    A(K,K2)=A(K,K2)/C
C       B(K)=B(K)/C
C
C     ELIMINA LA INCOGNITA X(K) PARA FILA I
C
C     DO 10 I=K1,L
C       K2=I-K+2
C       C=D(K2)
C       DO 5 J=I,L
C       K2=J-I+1
C       K3=J-K+1
C 5    A(I,K2)=A(I,K2)-C*A(K,K3)
C 10   B(I)=B(I)-C*B(K)
C 100 CONTINUE
```

```
C
C      CALCULA ULTIMA INCOGNITA
C
      IF (ABS(A(N,1))-0.000001) 1,1,101
101  B(N)=B(N)/A(N,1)
C
C      PROCESO DE RESUSTITUCION PARA CALCULO DE INCOGNITAS RESTANTES
C
      DO 200 I=1,N1
      K=N-I
      K1=K+1
      NI=K1+NBAN-2
      L=MINO(NI,N)
      DO 200 J=K1,L
      K2=J-K+1
200  B(K)=B(K)-A(K,K2)*B(J)
300  RETURN
      END
```

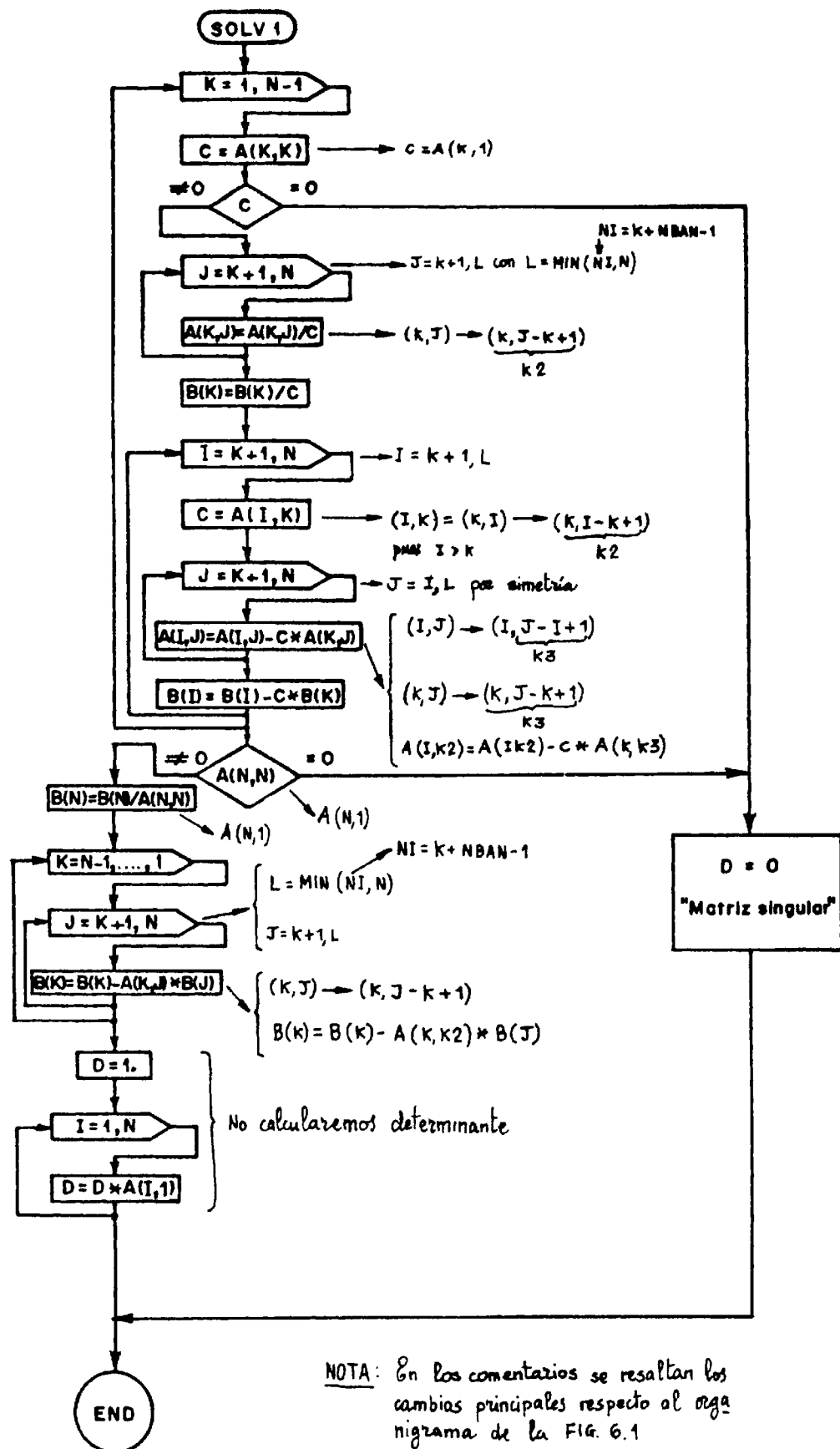


FIG. 6.3.- PASO DEL ESQUEMA GENERAL AL ESQUEMA SIMETRICO Y EN BANDA DE UNA MATRIZ

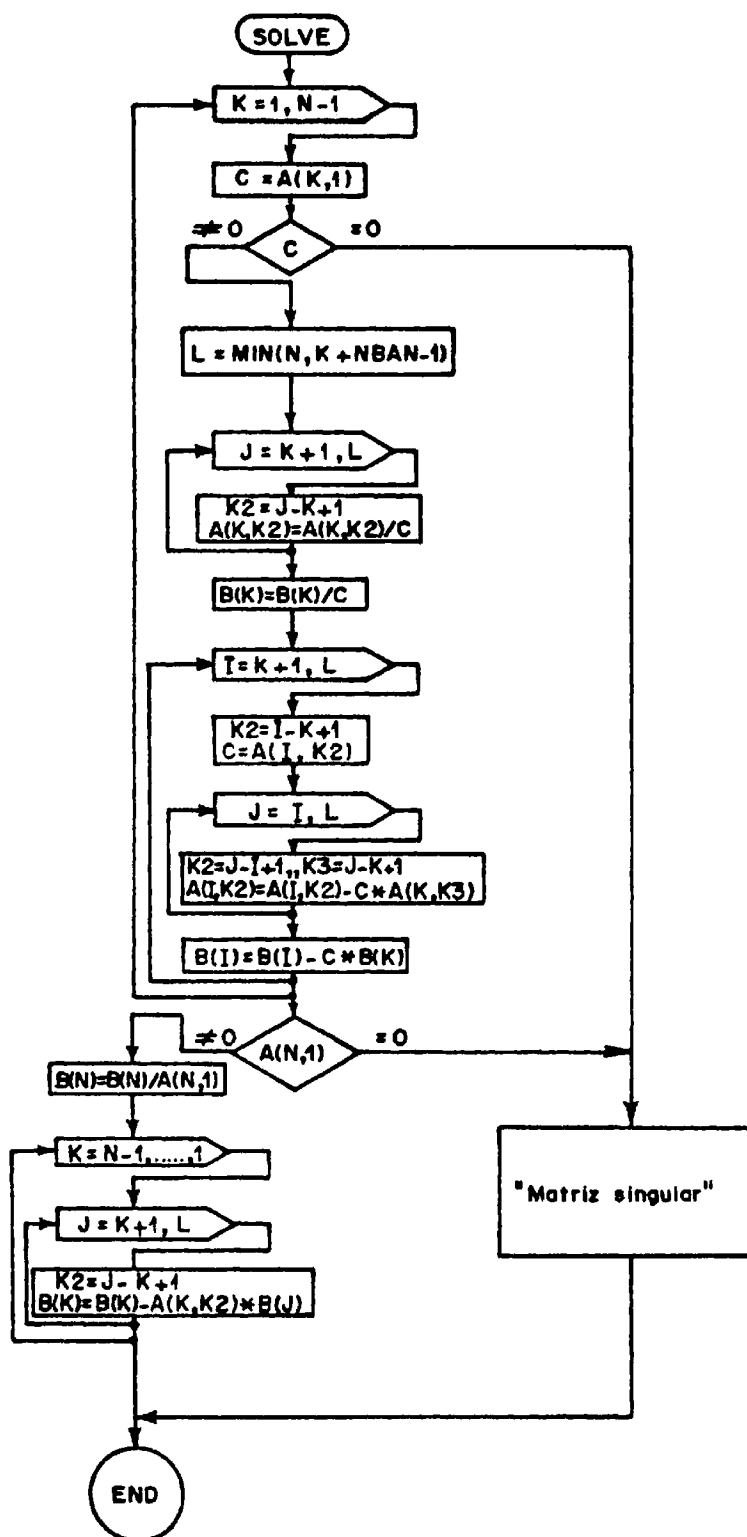


FIG. 6.4.- ORGANIGRAMA PARA LA SOLUCION DE SISTEMAS DE ECUACIONES SEGUN EL ESQUEMA SIMETRICO Y EN BANDA POR EL METODO DE GAUSS.

$$\underline{B}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad \underline{B}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad \underline{B}^n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

En este caso se plantean los conjuntos de sistemas de ecuaciones:

$$\underline{A}\underline{x}^1 = \underline{B}^1, \quad \underline{A}\underline{x}^2 = \underline{B}^2, \quad \dots \quad \underline{A}\underline{x}^n = \underline{B}^n$$

que se pueden reescribir de esta forma:

$$\underline{A} * (\underline{x}^1 \underline{x}^2 \dots \underline{x}^n) = (\underline{B}^1 \underline{B}^2 \dots \underline{B}^n) = \underline{I} \quad [6.13]$$

Multiplicando (6.13) por \underline{A}^{-1} se tiene:

$$(\underline{x}^1, \underline{x}^2, \dots, \underline{x}^n) = \underline{A}^{-1} \quad [6.14]$$

tal que los vectores incógnitas $\underline{x}^1, \underline{x}^2, \dots, \underline{x}^n$ resueltos son las columnas de \underline{A}^{-1} . Sin embargo, un procedimiento más adecuado consiste en considerar la matriz \underline{A} aumentada con la matriz unidad de la siguiente manera:

$$(\underline{A} \underline{I}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad [6.15]$$

Se puede aplicar a esta matriz el proceso de eliminación ya descrito, pero ahora para una matriz rectangular de n filas y $2n$ columnas. De este modo la división de una fila por su coeficiente de la diagonal se realiza hasta la columna $2n$ así como la eliminación de las incógnitas. Después de que la matriz \underline{A} en sus primeras $n \times n$ posiciones de la matriz aumentada es triangularizada, se aplica el proceso de sustitución hacia atrás en las filas 1 a n y desde la columna $n+1$ a $2n$. Para esto se considera simplemente cada columna de aquella matriz como un vector de términos independientes. El resultado final es que donde se encontraba almacenada la matriz unidad está ahora almacenada la matriz \underline{A}^{-1} buscada.

Si se utiliza el método de eliminación de Gauss para hallar la inversa son necesarias unas pocas modificaciones a los programas ya comentados.

Así la matriz \underline{A} será dimensionada con doble número de columnas que de filas. La matriz a invertir entrará en las primeras $N \times N$ posiciones del conjunto \underline{A} . La primera operación que realizará el programa es situar la matriz unidad en las siguientes $N \times N$ posiciones de \underline{A} . La rutina INVER comentada puede ser fácilmente programada tomando como referencia la rutina SOLV1.

6.4.- SOLUCION DE UN SISTEMA DE ECUACIONES SIMETRICO POR EL METODO DE CHOLESKI

En el caso de que la matriz del sistema sea simétrica, se puede aplicar el método de Choleski también llamado de Banachiewicz o de tridiagonalización, el cual presenta un eficiente esquema para su solución. Este método utiliza el hecho de que una matriz simétrica puede ser expresada como producto de dos matrices triangulares:

$$\underline{A} = \underline{s}^T * \underline{s} \quad [6.16]$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ s_{12} & s_{22} & 0 & \dots & 0 \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{1n} & s_{2n} & s_{3n} & \dots & s_{nn} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & \dots & s_{1n} \\ 0 & s_{22} & s_{23} & \dots & s_{2n} \\ 0 & 0 & s_{33} & \dots & s_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & s_{nn} \end{bmatrix} \quad [6.17]$$

los coeficientes de la matriz A anterior se pueden expresar como sigue:

$$\begin{aligned} a_{ij} &= s_{1i} s_{1j} + s_{2i} s_{2j} + \dots + s_{ii} s_{ij} & i < j \\ a_{ii} &= s_{1i}^2 + s_{2i}^2 + \dots + s_{ii}^2 & i = j \end{aligned} \quad [6.18]$$

Por lo tanto, los coeficientes de la primera fila de s, son:

$$s_{11} = \sqrt{a_{11}} \quad ; \quad s_{1j} = \frac{a_{1j}}{s_{11}} \quad \text{y en general}$$

$$s_{ii} = \left(a_{ii} - \sum_{l=1}^{i-1} s_{li}^2 \right)^{1/2} \quad ; \quad s_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{l=1}^{i-1} s_{li} s_{lj}}{s_{ii}} \quad j > i$$

[6.19]

El sistema $\underline{A} \underline{x} = \underline{B}$ se transforma al considerar la igualdad (6.16) en el siguiente:

$$\underline{s}^T \cdot \underline{s} \cdot \underline{x} = \underline{B} \quad [6.20]$$

cuya solución se puede reducir a encontrar la de los sistemas equivalentes

$$\underline{S}^T \underline{X} = \underline{B} \quad [6.21] \quad \text{y} \quad \underline{S} \underline{X} = \underline{C} \quad [6.22]$$

El sistema 6.21 desarrollado es:

$$\begin{bmatrix} S_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 & \dots & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{1n} & S_{2n} & S_{3n} & \dots & S_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ \vdots \\ C_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad [6.21']$$

Despejando en (6.21') los elementos de \underline{C} desde la primera fila a la última resulta:

$$C_1 = \frac{b_1}{S_{11}}, \quad C_2 = \frac{b_2 - S_{12}C_1}{S_{22}}, \quad \dots \quad C_i = \frac{b_i - \sum_{k=1}^{i-1} S_{ki} \cdot C_k}{S_{ii}} \quad i \geq 1 \quad 6.23$$

Una vez que el vector \underline{C} es conocido mediante el algoritmo (6.23) se puede encontrar el vector \underline{X} de las incógnitas utilizando la ecuación (6.22) que constituye un esquema de sustitución hacia atrás análogo al de la eliminación de Gauss. En forma desarrollada se escribe:

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & \dots & S_{1n} \\ 0 & S_{22} & S_{23} & \dots & S_{2n} \\ 0 & 0 & S_{33} & \dots & S_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & S_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ \vdots \\ C_n \end{bmatrix} \quad [6.22']$$

se deduce primero la última incógnita $x_n = \frac{c_n}{s_{nn}}$ y después las demás mediante el algoritmo:

$$x_k = \frac{c_k - \sum_{j=k+1}^n s_{kj} \cdot x_j}{s_{kk}} \quad k < n \quad [6.24]$$

Resumiendo, el método de Choleski consta de las siguientes fases: 1) Descomposición de la matriz A como producto de dos matrices S triangulares (algoritmo dado por la fórmula 6.19). En el programa que se escribe en esta sección se almacena la matriz S obtenida en A. 2) Resolución del sistema propiamente dicho de dos etapas:

- a) Cálculo de los coeficientes del vector c, ($\underline{s}^T \cdot \underline{c} = \underline{B}$) lo cual se puede realizar mediante las fórmulas 6.23. Se aprovecha precisamente el vector B para almacenar el vector c en el programa que aquí se desarrolla.
- b) Cálculo de incógnitas x, ($\underline{s} \underline{x} = \underline{c}$) mediante un proceso de sustitución atrás tal como se indica en el algoritmo 6.24. En este caso el vector B servirá para almacenar asimismo el vector incógnita x.

Por las consideraciones anteriores el método de Choleski se aplica mediante dos rutinas. La primera (DESCO) resuelve la primera fase de la descomposición de una matriz simétrica en producto de dos triangulares $\underline{A} = \underline{s}^T \underline{s}$, cuyo organigrama se indica en la figura 6.5 y se basa exclusivamente en el algoritmo 6.19. La programación de este algoritmo en FORTRAN se incluye a continuación. La segunda rutina resuelve el sistema propiamente dicho y se basa en las

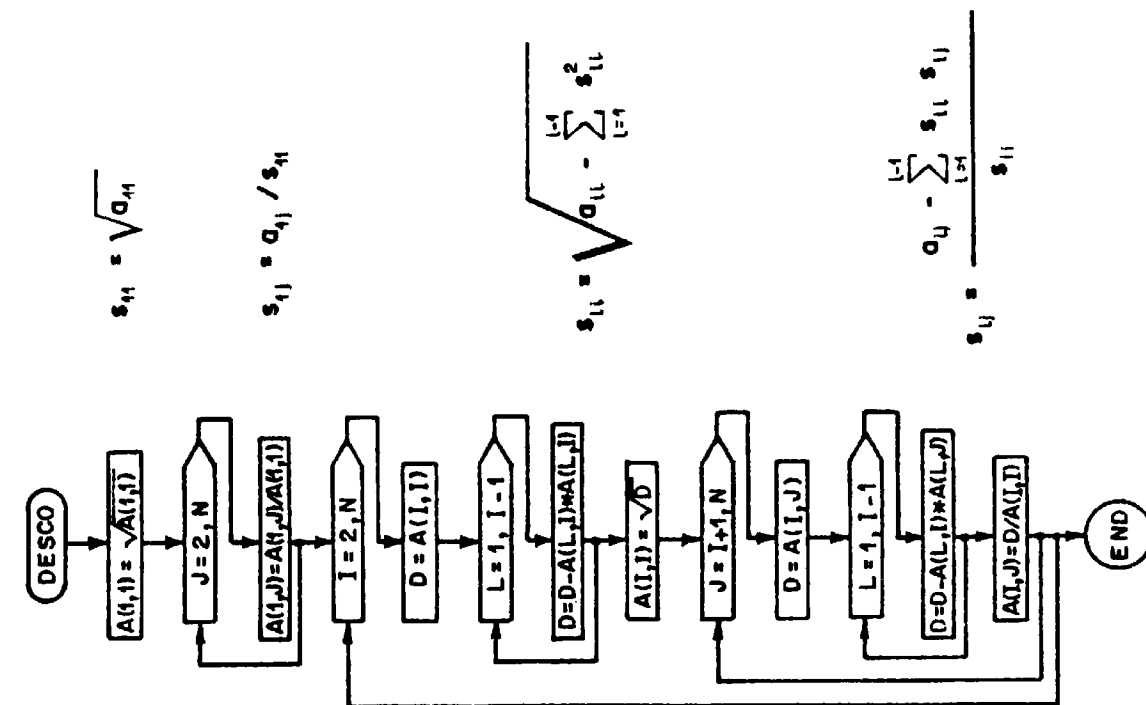


FIG. 6.5. - ORGANIGRAMA DE LA RUTINA "DESCO"
(Descompone \bar{A} en producto de dos triangulares \bar{S})

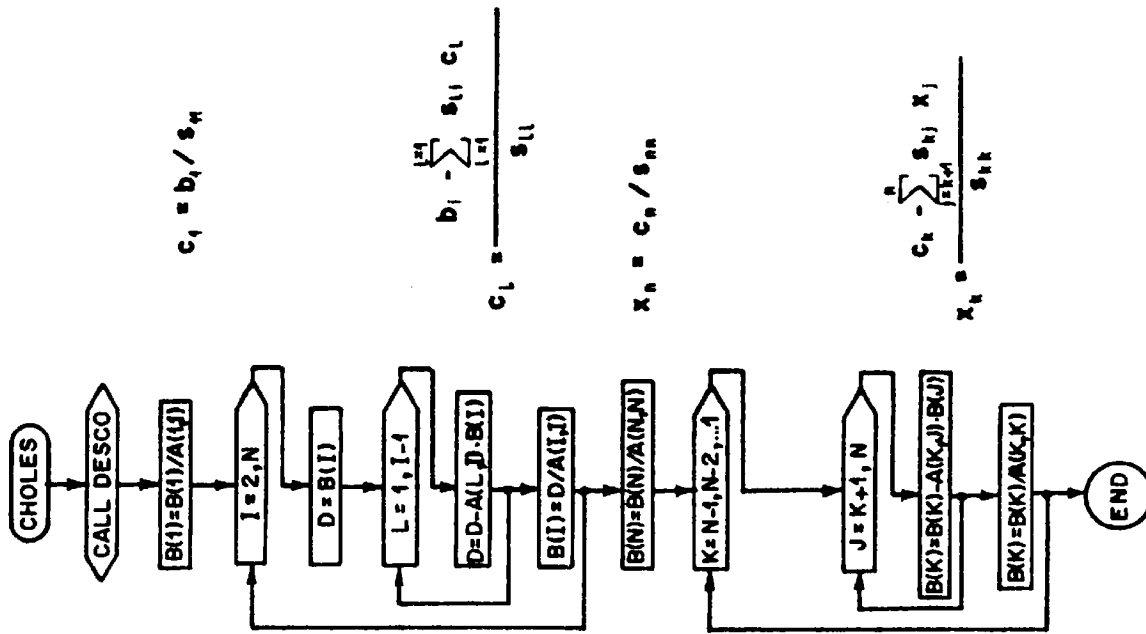


FIG. 6.6. - ORGANIGRAMA DE LA RUTINA "CHOLE"

```
C
C *****
C SUBROUTINE DESCO(A,N,NX)
C *****
C
C  ESTA RUTINA REALIZA LA DESCOMPOSICION DE UNA MATRIZ SIMETRICA,
C  Y,POSITIVA DEFINIDA,EN UNA TRIANGULAR SUPERIOR.
C
C  A    = MATRIZ SIMETRICA DE LOS COEFICIENTES DEL SISTEMA.POSTE -
C        RIORMENTE SE ALMACENA EN ESTE CONJUNTO LA MATRIZ TRIAN -
C        GULAR RESULTANTE.
C  NX   = DIMENSIONES MAXIMAS DE A
C  N    = ORDEN DE A
C
C  DIMENSION A(NX,NX)
C  IF(A(1,1))1,1,3
C  1 WRITE(6,2)
C  2 FORMAT(' RADICANDO NULO O NEGATIVO')
C  GOTO 200
C  3 A(1,1)=SQRT(A(1,1))
C  DO 10 J=2,N
C  10 A(1,J)=A(1,J)/A(1,1)
C  DO 40 I=2,N
C  I1=I-1
C  D=A(I,I)
C  DO 20 L=1,I1
C  20 D=D-A(L,I)*A(L,I)
C  IF(A(I,I)) 1,1,21
C  21 A(I,I)=SQRT(D)
C  I2=I+1
C  DO 40 J=I2,N
C  D=A(I,J)
C  DO 30 L=1,I1
C  30 D=D-A(L,I)*A(L,J)
C  40 A(I,J)=D/A(I,I)
C  DO 50 I=2,N
C  I1=I-1
C  DO 50 J=1,I1
C  50 A(I,J)=0.
C  200 RETURN
C  END
```

```
C
C *****
C SUBROUTINE CHOLES(A,B,N,NX)
C *****
C SOLUCION DE UN SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES POR EL METODO DE
C ELIMINACION DE CHOLESKI PARA MATRICES POSITIVAS DEFINIDAS.
C
C A   = MATRIZ DE LOS COEFICIENTES DEL SISTEMA
C B   = ORIGINALMENTE CONTIENE LOS TERMINOS INDEPENDIENTES; DES -
C       PUES DE RESUELTO EL SISTEMA,CONTIENE LOS VALORES DE LAS
C       INCOGNITAS HALLADAS.
C NX  = DIMENSIONES MAXIMAS DE A Y B
C N   = ORDEN DE A Y B
C
C DIMENSION A(NX,NX),B(NX)
C
C DESCOMPONE LA MATRIZ A EN TRIANGULAR ALMACENANDOLA EN A
C
C CALL DESCO(A,N,NX)
C
C CALCULA EL VECTOR C Y LO ALMACENA EN EL CONJUNTO B
C
C B(1)=B(1)/A(1,1)
C DO 10 I=2,N
C   D=B(I)
C   I1=I-1
C   DO 5 L=1,I1
C 5 D=D-A(L,I)*B(L)
C 10 B(I)=D/A(I,I)
C   B(N)=B(N)/A(N,N)
C
C CALCULA LAS INCOGNITAS DEL SISTEMA Y LAS ALMACENA EN B
C
C N1=N-1
C DO 30 L=1,N1
C   K=N-L
C   K1=K+1
C   DO 20 J=K1,N
C 20 B(K)=B(K)-A(K,J)*B(J)
C 30 B(K)=B(K)/A(K,K)
C RETURN
C END
```

fórmulas 6.23 y 6.24 tal como se indica en el organigrama de la figura 6.6. (Ver listados 6.3 y 6.4.

6.5.- INVERSA DE UNA MATRIZ TRIANGULAR POR EL METODO DE CHOLESKI (INVCH)

En los casos que se precise invertir una matriz triangular superior tal como:

$$\underline{S} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1n} \\ 0 & s_{22} & \dots & s_{2n} \\ 0 & 0 & s_{33} & \dots s_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & s_{nn} \end{bmatrix}$$

la aplicación del programa INVER ya comentado sería válida pero no se aprovecharían las ventajas en tiempo de computación debidas a la estructura de la matriz a invertir, por lo que es mucho más interesante la utilización del algoritmo que se comenta a continuación:

Sea la ecuación matricial:

$$\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} \\ 0 & s_{22} & s_{23} & s_{24} \\ 0 & 0 & s_{33} & s_{34} \\ 0 & 0 & 0 & s_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [6.25]$$

donde la matriz A es la inversa de S . Se puede verificar fácilmente que A es también una matriz triangular superior.

Multiplicando la i-ésima fila de S por la j-ésima columna de A se obtiene:

$$s_{ij} a_{ji} = 1$$

```
C
C      *****
C      SUBROUTINE INCHO(A,S,N,NX)
C      *****
C
C      INVERSA DE UNA MATRIZ TRIANGULAR SUPERIOR  S
C      LA INVERSA DE S SE ALMACENA EN A
C
C      NX  = DIMENSIONES MAXIMAS DE A Y S
C      N   = ORDEN DE A Y S
C
C      DIMENSION A(NX,NX),S(NX,NX)
C      DO 10 I=1,N
10  A(I,I)=1./S(I,I)
C
C      N1=N-1
C      DO 100 K=1,N1
C      NK=N-K
C      DO 100 I=1,NK
C      J=I+K
C      D=0.
C      I1=I+1
C      IK=I+K
C      DO 20 L=I1,IK
20  D=D+S(I,L)*A(L,J)
100 A(I,J)=-D/S(I,I)
C      RETURN
C      END
```


de manera que la sencilla fórmula $a_{ii} = \frac{1}{s_{ii}}$ permite calcular los elementos de la diagonal principal de A.

Multiplicando la i -ésima fila de S por la j -ésima columna de A, con $j = i+1$ se deduce la expresión:

$$s_{ii} a_{ij} + s_{ij} a_{jj} = 0 \quad [6.26]$$

de manera que para calcular los términos de la diagonal de A, siguiente a la diagonal principal, se puede utilizar la fórmula:

$$a_{ij} = -\frac{1}{s_{ii}} s_{ij} a_{jj} \quad [6.27]$$

Continuando de esta manera, para calcular los términos de la diagonal de desplazada k posiciones de la diagonal, se utiliza la fórmula:

$$a_{ij} = -\frac{1}{s_{ii}} \sum_{l=i+1}^{i+k} s_{il} * a_{lj} \quad \text{con } j = i + k \quad [6.28]$$

De acuerdo con esta fórmula de recurrencia es posible programar la rutina INVCH, la cual recibe la matriz triangular superior en S y calcula su inversa devolviéndola en el conjunto A. (Listado 6.5).

6.6.- SOLUCION DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES POR METODOS ITERATIVOS

El método de eliminación de Gauss forma parte de los llamados métodos directos. Bajo ciertas condiciones los sistemas de ecuaciones también pueden resolverse utilizando técnicas iterativas, como es el método de relajación.

tas \underline{x} y en los que se vuelve a entrar en el segundo miembro de las (6.30) resultando unas nuevas $x_i^{(k)}$ en el primer miembro y así sucesivamente hasta - que la aproximación $x_i^{(k)} \simeq x_i^{(k-1)}$ sea la requerida dentro de una determinada norma.

El método iterativo de Gauss-Seidel es prácticamente coincidente con el anterior, con la diferencia de que así como en la relajación el vector incógnita $\underline{x}^{(1)}$ se sustituía en bloque en (6.30) para obtener una nueva solución $\underline{x}^{(2)}$, en el método de Gauss una vez que se ha obtenido el nuevo valor de una componente x_k se sustituye en todas las demás ecuaciones $(k+1 \text{ a } n)$ sin esperar a deducir todas las nuevas componentes del vector $\underline{x}^{(k)}$. Así a partir de una solución aproximada $x_i^{(1)}$ se entra en la primera ecuación de (6.30) y se deduce un $x_1^{(2)}$ entrando de nuevo en la ecuación segunda de (6.30) con este valor $x_1^{(2)}$ y con $x_i^{(1)} (i \neq 1)$ se obtiene $x_2^{(2)}$ y, se continua hasta calcular todos los $x_i^{(k)}$. Procediendo así la convergencia se logra en general de forma más rápida que en el caso anterior.

Ejemplo.

Sea el sistema:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

que se resuelve utilizando los dos métodos de relajación y Gauss-Seidel: a partir de las fórmulas 6.30 se tiene para unos valores iniciales $\underline{x}^{(1)} = \underline{0}$

Iteración	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	
$x_1 = \frac{1}{2}(4 - x_2)$	2	1.5	2.5	2.1	2.9	2.	2.	3.	3.25	$\approx 4.$	4.
$x_2 = \frac{1}{2}(2 - x_1 - x_3)$	1	-1	-0.25	-1.0	-1.1	0	-1	-2.5	-3.9	≈ -4	-4
$x_3 = (2 - x_2)$	2.	1.	3.	2.3	3.9	2.	4	4.5	5.9	≈ 6	6.
Relajación						Gauss-Seidel				Exacto	

Se observa que con el método de Gauss-Seidel en la quinta iteración ya se ha obtenido casi la solución exacta y sin embargo, con el método de relajación la aproximación es muy pobre con tan bajo número de iteraciones. Además, esta diferencia en la velocidad de convergencia entre los dos métodos se acentua con el número de ecuaciones.

Así pues, en el método de Gauss-Seidel la ecuación general para la r-ésima iteración será:

$$x_k^{(r)} = \frac{1}{a_{kk}} \left[b_k - \sum_{i=1}^{k-1} a_{ki} x_i^{(r)} - \sum_{i=k+1}^n a_{ki} x_i^{(r-1)} \right] \quad [6.31]$$

ecuación en la que se basa el organigrama de la figura 6.7 y el programa SOLGS que se da a continuación de tal figura. (Ver listado 6.6).

Cuando se utilizan métodos iterativos es necesario adoptar un criterio para controlar cuando se logra la convergencia y en caso contrario limitar el

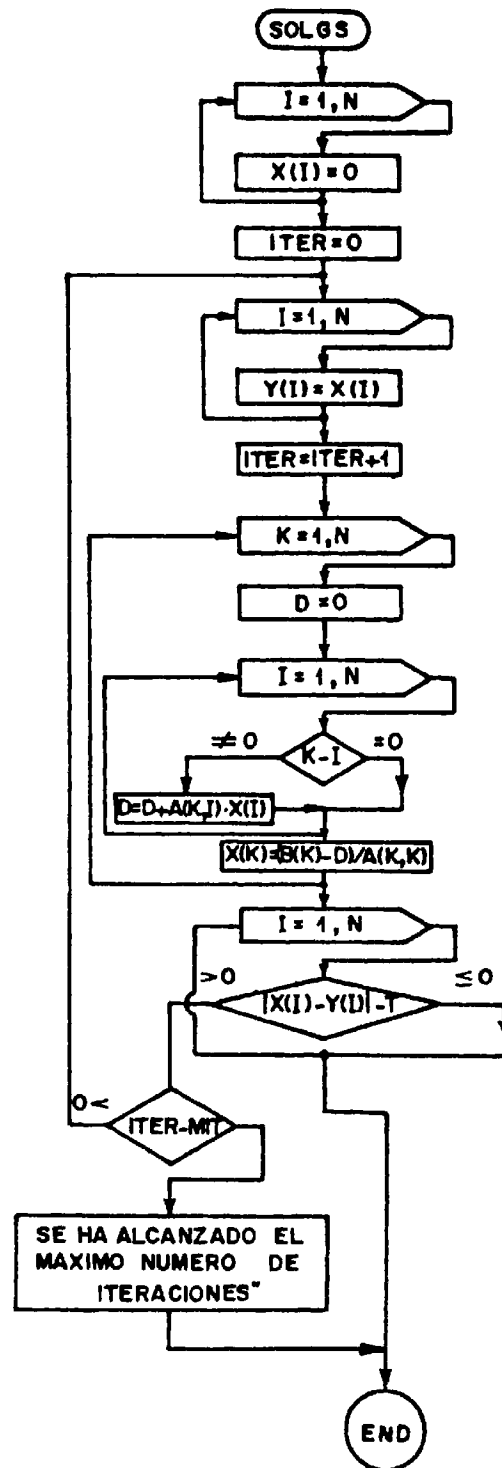


FIG. 6.7.- ORGANIGRAMA DE LA RUTINA "SOLGS"

(Resolución de sistemas de ecuaciones por el método de Gauss-Seidel)

número máximo de iteraciones. En general es común utilizar la norma de la diferencia entre $\underline{x}^{(r-1)}$ almacenado en el conjunto \underline{x} y $\underline{x}^{(r)}$ almacenado en \underline{y} como criterio de comparación con un límite prefijado (por ejemplo 0.01).

Si la matriz de los coeficientes es simétrica y positiva se puede mostrar que el método de Gauss es convergente, no obstante lo cual, en algunos sistemas la convergencia puede ser relativamente lenta por lo que es interesante acudir a los métodos de sobrerelajación. La idea de estos métodos consiste en utilizar un factor de sobrerelajación que permite aumentar la velocidad de convergencia del método iterativo, como se indica a continuación:

Se supone que el cálculo se encuentra en la iteración r -ésima y la solución alcanzada es:

$$x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, \dots, x_k^{(r)}, \dots, x_n^{(r)}$$

Al introducir esta solución en la k -ésima ecuación se obtiene $x_k^{(r+1)}$ que se denomina ahora x_k^* pero para la $x_k^{(r+1)}$ se efectúa en realidad una extrapolación entre $x_k^{(r)}$ y x_k^* para así aumentar la relación de convergencia; es decir, se deduce $x_k^{(r+1)}$ según la fórmula:

$$x_k^{(r+1)} = x_k^{(r)} + (x_k^* - x_k^{(r)}) * \gamma \quad [6.32]$$

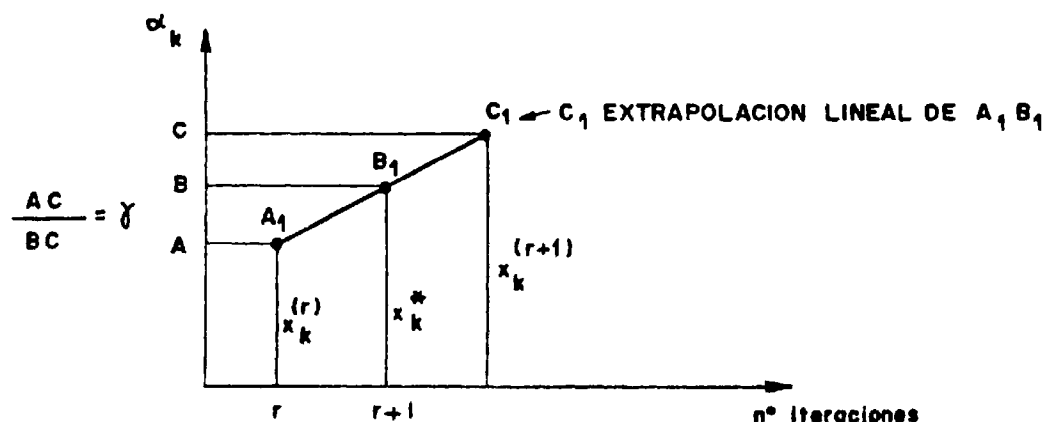


FIG. 6.8

```
C
C *****
C SUBROUTINE SOLGS(A,B,X,N,MIT,T)
C *****
C
C SOLUCION DE UN SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES POR EL METODO
C ITERATIVO DE GAUSS-SEIDEL
C
C A = MATRIZ DE LOS COEFICIENTES DEL SISTEMA
C B = CONTIENE LOS TERMINOS INDEPENDIENTES
C X = CONTIENE LOS VALORES DE LAS INCOGNITAS
C Y = VECTOR AUXILIAR
C N = ORDEN DEL SISTEMA
C MIT = MAXIMO NUMERO DE ITERACIONES PERMITIDAS
C T = TOLERANCIA
C
C DIMENSION A(50,50),B(50),X(50),Y(50)
C DO 1 I=1,N
1 X(I)=0.
  ITER=0
2 DO 3 I=1,N
3 Y(I)=X(I)
  ITER=ITER+1
  DO 10 K=1,N
  D=0.
  DO 7 I=1,N
  IF(K-I)4,7,4
4 D=D+A(I,J)*X(K)
7 CONTINUE
10 X(I)=(B(I)-D)/A(I,I)
  DO 20 I=1,N
  IF (ABS(X(I)-Y(I))-T) 20,20,22
20 CONTINUE
21 RETURN
22 IF(ITER-MIT) 2,23,23
23 WRITE(6,24)
24 FORMAT(' SE HA ALCANZADO EL MAXIMO NUMERO DE ITERACIONES ')
  GOTO 21
  RETURN
  END
```

donde $\gamma > 1$ es el factor de sobrerelajación.

El factor óptimo de sobrerelajación depende evidentemente de la estructura del sistema de ecuaciones pero parece ser adecuada la fórmula:

$$\gamma_{\text{opt.}} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho^2}} \quad [6.33]$$

donde ρ es el mayor autovalor de la matriz del sistema, en la práctica son valores adecuados de ρ de 1.4 a 1.9.

Existen estructuras que contiene elementos muy rígidos frente a otros que lo son menos. La resolución de estos problemas presenta sistemas mal condicionados o "casi singulares", en cuyo caso la solución es ambigua tal como resulta en el intento de encontrar el punto de intersección de dos rectas casi coincidentes. (Figura 6.9).

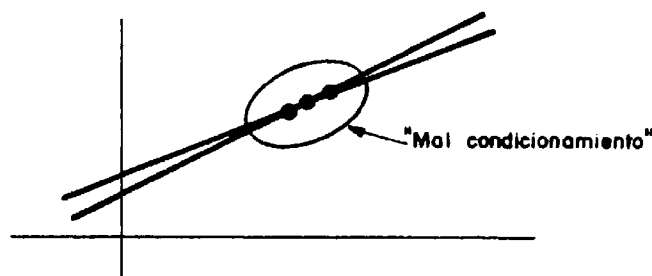


FIG. 6.9

Este inconveniente se acentúa sobre todo en los métodos iterativos pues al converger en la dirección de la solución si se salta ésta, el problema se transforma en divergente.

Un criterio práctico para analizar la convergencia es el siguiente:

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \quad [6.34]$$

esto es, que el sistema sea marcadamente diagonal.

En el caso de matrices simétricas y en banda la técnica de Gauss-Seidel es fácilmente extrapolable modificando convenientemente el organigrama 6.7.

Las principales ventajas de los métodos iterativos son la reducción del almacenamiento en la memoria central y la eliminación de la descomposición triangular que es la parte más costosa de la solución directa. Los inconvenientes son; el desconocimiento a priori del número de iteraciones necesario para obtener una solución aceptable (con frecuencia se requieren cientos de iteraciones), también el factor de sobrerelajación γ puede alterar significativamente la convergencia.

Estos inconvenientes son en general superior a las ventajas, sobre todo en lo que se refiere al logro de la convergencia en ciertas situaciones y es el motivo por el que la mayoría de los programas basados en el MEF siguen métodos directos para resolver las ecuaciones algebraicas. Sin embargo, en el tratamiento de problemas no lineales, que exige la resolución sucesiva de distintas ecuaciones lineales, puede ser aconsejable un método iterativo en comparación con otro directo.

6.7.- OTROS METODOS DIRECTOS

6.7.1.- INTRODUCCION

Con la utilización del método de los elementos finitos han aparecido o mejor se han revitalizado otras técnicas numéricas para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales que con frecuencia engloban un gran número de incógnitas y, que hacen prohibitiva la utilización de las soluciones en banda ya comentadas (requerimientos de memoria excesivo y un cuidado adicional en la numeración de los nudos de la estructura).

Para la explicación de tales técnicas se recurre a un lenguaje marcadamente estructural para no caer así en la complejidad de los algoritmos numéricos que se presentan.

Por este motivo se utiliza la notación:

$$\underline{k} \underline{U} = \underline{F} \quad [6.35]$$

para expresar el antiguo sistema $\underline{A}\underline{x} = \underline{B}$ donde las incógnitas ahora son las componentes del vector desplazamiento U y k matriz de rigidez o de los coeficientes y F el vector fuerza o de los términos independientes.

6.7.2.- PARTICION EN DOS SUBESTRUCTURAS

La estructura global, se considera constituida por dos subestructuras, separadas por un frente "f" de nudos (frente de nudos es el conjunto de nudos

que separa la estructura en 2 partes, de modo que si se fijan, $\underline{U}_f = \underline{0}$, cualquier acción sobre una subestructura no influye en la otra). Este hecho implica la partición de matrices siguiente:

$$\begin{pmatrix} \underline{K}_{11} & \underline{K}_{1f} & \underline{0} \\ \underline{K}_{f1} & \underline{K}_{ff} & \underline{K}_{f2} \\ \underline{0} & \underline{K}_{2f} & \underline{K}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_f \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{F}_1 \\ \underline{F}_f \\ \underline{F}_2 \end{pmatrix} \quad [6.36] \quad \Delta \textcircled{1} \Delta f \Delta \textcircled{2} \Delta$$

Siendo \underline{U}_1 los desplazamientos internos de la subestructura ①

\underline{U}_2 los desplazamientos internos de la subestructura ②

\underline{U}_f los desplazamientos del frente común f

\underline{F}_1 son las fuerzas nodales correspondientes a la subestructura ①

\underline{F}_2 son las fuerzas nodales correspondientes a la subestructura ②

\underline{F}_f son las fuerzas nodales correspondientes al frente f

En la formación de \underline{K}_{11} , \underline{K}_{1f} y \underline{K}_{f1} intervienen solo los elementos de la subestructura ①. En \underline{K}_{22} , \underline{K}_{2f} y \underline{K}_{f2} intervienen solo los elementos de la ②

$$\text{En } \underline{K}_{ff} \text{ intervienen los elementos } \textcircled{1} \text{ y } \textcircled{2} : \underline{K}_{ff} = \underline{K}_{ff}^1 + \underline{K}_{ff}^2 \quad [6.37]$$

$$\text{En } \underline{K}_f \text{ intervienen los elementos } \textcircled{1} \text{ y } \textcircled{2} : \underline{F}_f = \underline{F}_f^1 + \underline{F}_f^2 \quad [6.38]$$

La acción del frente como base de interinfluencia de las dos subestructuras 1 y 2 se pone de manifiesto por las matrices nulas $\underline{0}$ en 6.36 así cualquier desplazamiento \underline{U}_2 que se imponga no repercute en \underline{F}_1 .

El sistema (6.36) se puede descomponer en los siguientes:

$$\begin{pmatrix} \underline{k}_{11} & \underline{k}_{1f} \\ \underline{k}_{f1} & \underline{k}_{ff} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{F}_1 \\ \underline{F}_f \end{pmatrix} \quad [6.39] \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} \underline{k}_{ff}^2 & \underline{k}_{f2} \\ \underline{k}_{2f} & \underline{k}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{U}_f \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{F}_f^2 \\ \underline{F}_2 \end{pmatrix} \quad [6.40]$$

De la 1^a ecuación de la expresión [6.39] resulta:

$\underline{U}_1 = \underline{k}_{11}^{-1} (\underline{F}_1 - \underline{k}_{1f} \underline{U}_f)$ y entando en la 2^a de [6.39] se obtiene:

$$\boxed{\underline{k}_1^* \cdot \underline{U}_f = \underline{F}_{f1}^*} \quad [6.41] \quad \text{con} \quad \begin{cases} \underline{k}_1^* = \underline{k}_{ff}^1 - \underline{k}_{f1} \cdot \underline{k}_{11}^{-1} \underline{k}_{1f} \\ \underline{F}_{f1}^* = \underline{F}_f^1 - \underline{k}_{f1} \cdot \underline{k}_{11}^{-1} \underline{F}_1 \end{cases} \quad [6.42]$$

Manipulando analogamente la expresión [6.40] se deduce la igualdad:

$$\boxed{\underline{k}_2^* \cdot \underline{U}_f = \underline{F}_{f2}^*} \quad [6.43] \quad \text{con} \quad \begin{cases} \underline{k}_2^* = \underline{k}_{ff}^2 - \underline{k}_{f2} \cdot \underline{k}_{22}^{-1} \underline{k}_{2f} \\ \underline{F}_{f2}^* = \underline{F}_f^2 - \underline{k}_{f2} \cdot \underline{k}_{22}^{-1} \underline{F}_2 \end{cases} \quad [6.44]$$

Se trata pues de reducir las ecuaciones de ambas subestructuras en función de las únicas incógnitas del frente común \underline{U}_f , modificando convenientemente las matrices de rigidez de ambas subestructuras para condensarlas a estos grados de libertad del frente. Así mismo, las fuerzas nodales se modifican de

El organigrama será:

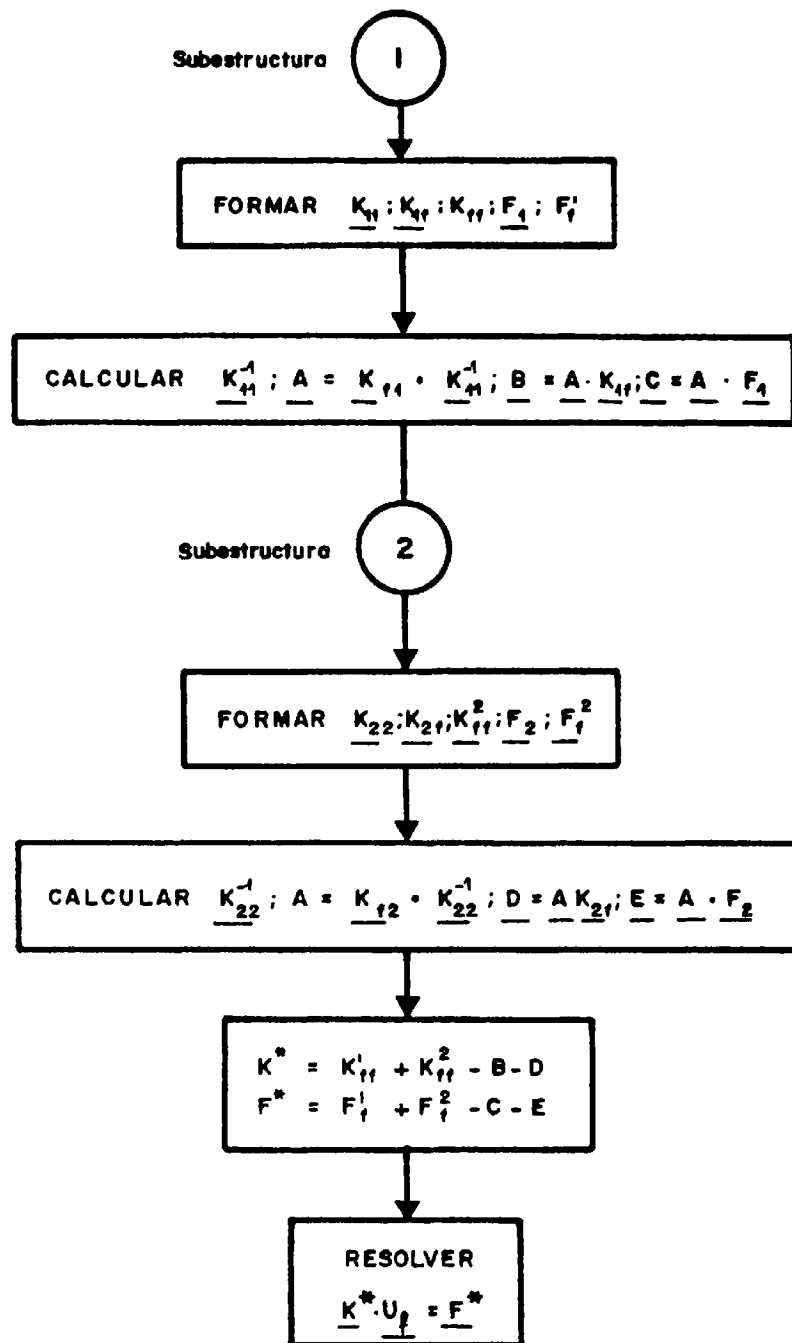


FIG. 6. 10. - ORGANIGRAMA: TECNICA DE PARTICION EN 2 SUBESTRUCTURAS

forma que por ejemplo $\underline{F}_{f_1}^*$ de 6.41 representa un sistema equivalente de fuerzas aplicadas en los nudos del frente y que por otra parte coincidiría con \underline{F}_f si no hubiera fuerzas en los nudos interiores de la subestructura 1.

Ahora bien, de las condiciones de equilibrio en los nudos del frente se tiene: $\underline{F}_f^* = \underline{F}_{f_1}^* + \underline{F}_{f_2}^*$ (siendo \underline{F}_f^* el sistema equivalente de fuerzas de toda la estructura aplicado en los nudos del frente ($\underline{F}_f^* \equiv \underline{F}_f$ si sólo estuvieran cargados los nudos)).

Por tanto

$$\underline{F}_f^* = \underline{F}_{f_1}^* + \underline{F}_{f_2}^* = \underline{k}_1^* U_f + \underline{k}_2^* U_f = (\underline{k}_1^* + \underline{k}_2^*) U_f = \underline{k}^* U_f \quad [6.45]$$

donde las expresiones \underline{F}_f^* y $\underline{k}^* = \underline{k}_1^* + \underline{k}_2^*$ se calculan a partir de las expresiones (6.42) y (6.44)

6.7.3.- TECNICA DE LAS SUBESTRUCTURAS EVOLUTIVAS

Es análoga a la solución anterior pero considerando ahora que la subestructura 1 empieza siendo una parte pequeña de la estructura y va evolucionando sucesivamente hasta ser la estructura total. El frente "f" que separa las subestructuras 1 y 2 va asimismo paseándose por toda la estructura quedando el frente antiguo total o parcialmente englobado en la nueva subestructura .

6.7.4.- METODO FRONTAL

En el método de eliminación de Gauss para sistemas simétricos y en bandas el proceso de formación de la matriz de rigidez \underline{k} , se separaba totalmen-

te de la resolución del sistema, no comenzando el proceso de eliminación hasta que no se encontrase totalmente ensamblado

Por el contrario con las técnicas frontales los procesos de formación de la matriz de rigidez y de resolución del sistema se llevan a cabo simultáneamente. Con estos métodos se propone ir eliminando las incógnitas tan pronto como su ecuación esté totalmente formada. Por esto último hay que tener en cuenta que la ecuación correspondiente al gdl k -ésimo, está completa cuando se ha añadido la contribución de las rigideces de todos los elementos que contienen dicho grado de libertad.

De aquí se deduce fácilmente que, así como, para la solución en banda había que observar el orden de numeración de los nudos, en la solución frontal sin embargo, no repercute tal orden, siendo muy importante cuidar convenientemente la numeración de los elementos de manera que el número de grados de libertad que hayan aparecido en un momento dado, sin estar sus ecuaciones totalmente formadas ("número que se denomina frente") sea mínimo.

Las técnicas frontales son muy adecuadas para la resolución de programas de elementos finitos complejos y con gran número de nudos intermedios.

Otra de las características de los programas de elementos finitos que utilizan técnicas frontales, es la de ver alterada la organización de las fases clásicas dadas en el programa principal y que es consecuencia de que con las técnicas frontales la formación de la matriz de rigidez y la resolución del sistema son simultáneas lo cual condiciona en gran manera la organización del programa que en este caso está prácticamente supeditado a la resolución del sistema de ecuaciones.

CAPITULO 6.- EJERCICIOS

6.1.- Dada la matriz \underline{A} de dimensiones 5×5 y cuyo término general a_{ij} viene dado por la expresión:

$$a_{ij} = \frac{1}{i+j}$$

Se pide resolver el sistema $\underline{A}\underline{x}=\underline{B}$, calculando las componentes de \underline{x} con cuatro cifras decimales y siendo:

$$\underline{B}^T = [1, 0, 0, 0, 0]$$

Se resolverá el sistema en simple y doble precisión observando que los residuos calculados son muy distintos debido al mal - condicionamiento del sistema.

Una manera de comprobar este mal condicionamiento es analizando la relación:

$$\beta = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min.}}$$

siendo λ_{\max} y λ_{\min} el mayor y menor autovalor de la matriz \underline{A} , resultando que a mayor β el condicionamiento empeora.

CAPITULO 7.- RESULTADOS

7.1.- INTRODUCCION AL CALCULO DE RESULTADOS

Los resultados que se obtienen en el método de los elementos finitos proceden de la resolución del sistema de ecuaciones lineales que proporciona los valores de las incógnitas básicas del cálculo: los movimientos en los nudos. A partir de estos valores la etapa siguiente consiste en obtener los restantes resultados de interés en un análisis, particularmente las tensiones en el contorno.

Las tensiones se calculan a partir de la expresión deducida en el capítulo 2; válida para un punto cualquiera de un elemento:

$$\underline{\sigma} = \underline{D} (\underline{\epsilon} - \underline{\epsilon}_0) + \underline{\sigma}_0 = \underline{D} (\underline{B} \underline{U} - \underline{\epsilon}_0) + \underline{\sigma}_0 \quad [7.1]$$

con $\underline{\epsilon}_0$ y $\underline{\sigma}_0$ los vectores deformación y tensión iniciales existentes en el elemento considerado. Conviene recordar que los resultados deducidos en el MEF, presentan las siguientes características:

- 1.- El equilibrio no se satisface normalmente dentro de cada elemento, es decir, las ecuaciones diferenciales de equilibrio interno del problema, en cada punto del elemento no se satisfacen para el campo de tensiones deducido en (7.1). Esta conclusión no es aplicable al elemento de deformación constante (CT), puesto que sus tensiones también lo son (supuesta homogeneidad del material).

- 2.- El equilibrio entre elementos en general no se satisface. Las tensiones calculadas según la expresión (7.1) para cada elemento y en un punto común o nudo, no son idénticas.
- 3.- Las ecuaciones de equilibrio de las fuerzas se satisfacen para cada nudo de la malla.
- 4.- La compatibilidad en el interior de los elementos, interelemental y en los nudos se satisface siempre. Si los elementos son incompatibles o no conformes la compatibilidad entre elementos puede fallar.

De las anteriores características de los resultados del MEF se comprueba que la aplicación de la expresión (7.1), conduce a valores de las tensiones dependientes del punto. Sin embargo, en el caso del elemento triangular con funciones de interpolación lineales que se utiliza en el programa, la propiedad de deformación constante, implica que las tensiones también lo son dentro del elemento (supuesto D constante, es decir, material homogéneo). Existe una indeterminación, en este caso especial, acerca del punto del elemento en el que más razonablemente debe situarse estas tensiones. Es usual considerar el centro de gravedad del elemento como punto representativo, pero suele ser conveniente desde un punto de vista de análisis obtener los resultados de las tensiones, en los mismos puntos que los movimientos, es decir, en los nudos. Por ello, existe una técnica alternativa, que calcula los resultados de las tensiones en los nudos de la malla como media ponderada de los valores de las tensiones en los elementos adyacentes. Se han utilizado diferentes técnicas de ponderación de estos resultados, basados en consideraciones empíricas, pero las ventajas obtenidas no parecen ser muy considerables, acaso la más común corresponde a la utilización como pesos, las áreas de los elementos y ex-

tender la media a todos los elementos concurrentes en el nudo. Sin embargo, en los nudos de borde, este procedimiento les adjudica valores de las tensiones correspondientes a puntos del interior. A veces en estos casos, se procede a llevar a cabo extrapolaciones de los resultados, o bien a obtener a partir de las condiciones de borde, las deformaciones medias allí como diferencias de movimientos en los nudos del contorno y por lo tanto, las tensiones. Loubignac sugiere un procedimiento iterativo que mejora simultaneamente los resultados de las tensiones y de los movimientos. Consiste en obtener los valores de las tensiones en los nudos de la malla, utilizando cualquiera de los métodos descritos anteriormente. Estos valores se interpolan dentro de cada elemento mediante las funciones de forma \underline{N} , es decir:

$$\underline{\sigma} = \underline{N} \underline{\sigma}^* \quad [7.2]$$

en donde $\underline{\sigma}$ es una función de punto. A continuación se computa el desequilibrio en cada nudo de estas tensiones (consideradas como iniciales del elemento) con las fuerzas exteriores. Sea este vector de fuerzas nodales en desequilibrio $\underline{\Delta F}$ con:

$$\underline{\Delta F} = \underline{R} - \sum_{n=1}^{NE} \int_V \underline{B}^T \underline{\sigma} dv \quad [7.3]$$

La suma en la expresión (7.3) se extiende a todos los elementos de la malla y se suma de un modo consistente o booleano (las contribuciones alrededor de cada nudo). Si $\underline{\Delta F} \neq 0$, es decir, existe desequilibrio en los nudos, se procede a modificar los movimientos \underline{U} en los nuevos valores $\underline{U}' = \underline{U} + \underline{\Delta U}$ siendo los movimientos incógnitas incrementales, la solución del sistema:

$$\underline{K} \underline{\Delta U} = \underline{\Delta F} \quad [7.4]$$

Las nuevas tensiones en los nudos $\underline{\sigma}^1$ pueden obtenerse a partir de los desplazamientos corregidos \underline{U}^1 . El proceso podría continuarse de un modo iterativo hasta alcanzar una aproximación razonable para las fuerzas nodales en desequilibrio

El procedimiento que se acaba de describir conduce a una mejora espectacular de los resultados de un cálculo obtenidos incluso con mallas muy gruesas, tras un corto número de iteraciones (cuatro o cinco). Se debe considerar que la resolución del sistema 7.4, se ve facilitada por el hecho de conservar constante la matriz de rigidez total de la estructura. Sin embargo, el procedimiento de Loubignac presenta unas componentes heurísticas que deben de ser examinadas cuidadosamente.

7.2.- PUNTOS DE CALCULO OPTIMO DE LOS RESULTADOS

Como se ha indicado en la sección anterior los puntos más convenientes desde el punto de vista de la organización de un análisis son indudablemente los nudos. En ellos se determinan los movimientos y sería conveniente que también las tensiones fueran conocidas en estos puntos. Sin embargo, estas son mucho mas exactas en puntos interiores del elemento.

El tema de la elección de los puntos óptimos para el cálculo de tensiones no se encuentra totalmente resuelto, si bien resultados importantes y de gran interés práctico han sido deducidos. Antes de su exposición, se presentan algunas consideraciones de interés a este respecto:

La siguiente argumentación puede utilizarse para explicar estos resultados. Se supone un campo polinómico de movimientos ϕ' (funciones de forma) en

el elemento, cuyo orden sea una unidad mayor que el del máximo polinomio completo contenido en el campo real ϕ . Se denominan \underline{U}' los grados de libertad no dales asociados con el campo ϕ' . Si se intentan encontrar los puntos del elemento en donde las tensiones calculadas a partir de ϕ' son idénticas a las tensiones obtenidas de ϕ , suponiendo que se imponen los grados de libertad \underline{U}' , se deducen que estos puntos coinciden con los de Gauss (descritos en el apartado 5.2). Si se trata de un problema C^0 , se puede asegurar que las tensiones en estos puntos son casi tan exactas como los movimientos nodales. En efecto, los puntos óptimos de tensiones definen un ajuste mediante mínimos cuadrados al campo de grado más alto.

Se puede, por lo tanto deducir un procedimiento muy efectivo para la determinación de las tensiones en los nudos de la malla, que consiste en obtener los resultados en los puntos de Gauss. En ellos se han calculado durante el proceso de integración numérica las matrices \underline{DB} , $\underline{\epsilon}_0$ y $\underline{\sigma}_0$. A partir de los resultados de estas tensiones se pueden utilizar funciones de interpolación correspondientes a elementos con nudos en los puntos de Gauss para deducir por extrapolación los valores de estas tensiones en los nudos del elemento. Es conveniente efectuar esta extrapolación en coordenadas intrínsecas (ξ, η) para el rectángulo o L_1, L_2, L_3 para el triángulo.

Algunas de estas fórmulas de paso de las tensiones de los puntos de Gauss a los nudos son presentadas por Hinton y Campbell. En la figura 7.1 se muestra una aplicación a elementos isoparamétricos cuadráticos.

El procedimiento de cálculo de las tensiones se encuentra implementado de forma rutinaria en varios programas comerciales. Sin embargo, el carácter in-

troductorio del programa, que aquí se desarrolla, aconseja la utilización de la simple y muchas veces eficaz, técnica de computación de las tensiones en los nudos mediante promedio de los valores en el cdg de los elementos continuos. No se considera la extrapolación a los nudos de borde, puesto que cierta prudencia debe de ser tomada en cuenta durante la fase de extrapolación de los resultados a estos nudos.

La importancia de la elección de estos puntos de cálculo depende de los gradientes tensionales que se producen, así en el caso más sencillo se analiza una estructura sometida a un campo de tensiones uniforme homogéneo, tal como se indica en la figura 7.2, la solución obtenida por elementos finitos coincidirá con la exacta cualquiera que sea la discretización realizada no siendo relevante por tanto los puntos en que se calculen las tensiones.

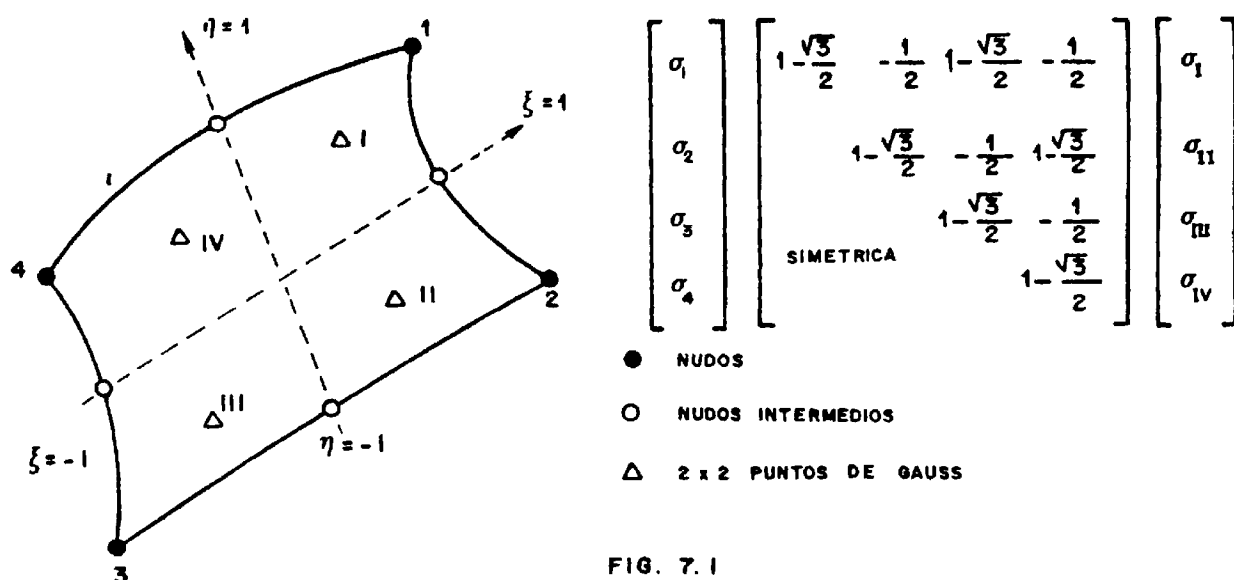
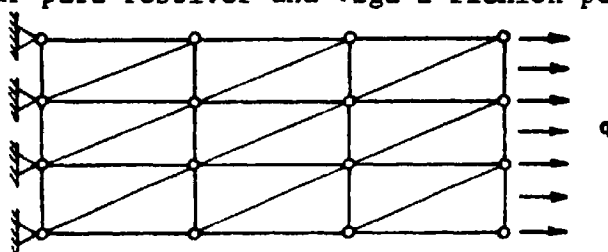
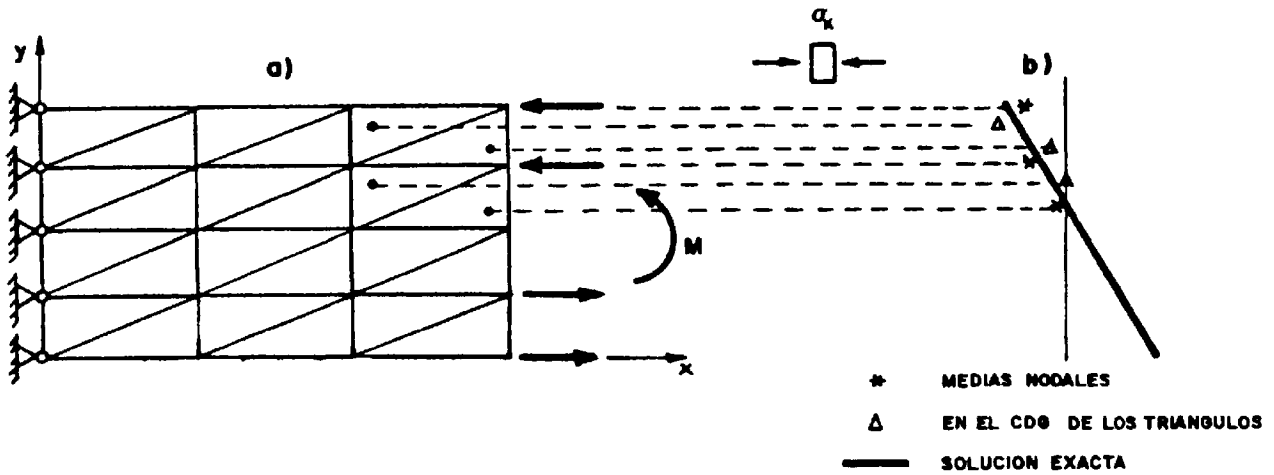


FIG. 7.1

En cualquier otro caso de variación de las tensiones, la solución obtenida utilizando elementos finitos de deformación constante sólo será aproximada, tal como se indica en la figura 7.3b en la que se muestran los resultados obtenidos con el MEF para resolver una viga a flexión pura (figura 7.3a).





Se observa inmediatamente que si las tensiones axiales ∇_x obtenidas para cada elemento, se consideran actuando en su c.d.g. y se representan como se indica en la figura 7.3b) la recta que mejor se ajusta a dichos valores coincide prácticamente con la resolución exacta.

Si se tiene en cuenta que el c.d.g. es el único punto de integración necesario en el caso de utilizar triángulos de deformación constante lo expuesto en el párrafo anterior representa una particular confirmación del hecho de que los puntos óptimos para el cálculo de tensiones o cantidades similares son los puntos de integración gaussiana.

Por ejemplo, en la figura 7.4 se representa el estudio de una viga en voladizo mediante cuatro elementos cuadráticos de 8 nudos. Mientras que los resultados para las flechas y los esfuerzos axiales son excelentes, los esfuerzos cortantes muestran una variación parabólica en cada elemento que proporciona una representación muy pobre de las tensiones reales. Sin embargo, los valores

tomados en los puntos de Gauss representan adecuadamente los esfuerzos cortantes medios exactos. Si se desean los valores nodales, deberán simplemente extrapolarse linealmente de los valores en los puntos gaussianos y se observa en la figura 7.4b que se siguen obteniendo valores muy aceptables.

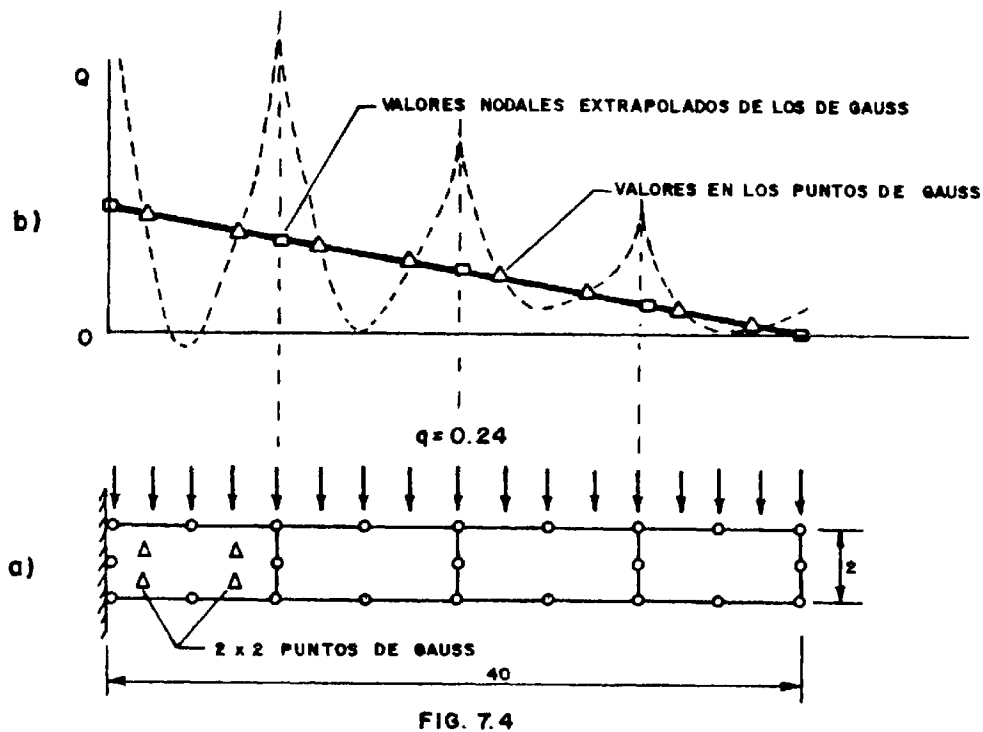


FIG. 7.4

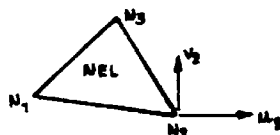
7.3.- SUBROUTINAS PARA EL CALCULO DE RESULTADOS

El cálculo de tensiones se efectúa dentro de la rutina TENS, considerando el promedio sin ponderación de los valores de las tensiones en elementos que contienen el nudo. Esta subrutina consta de un bucle que se extiende a todos los elementos de la estructura donde se calculan las tensiones $FORC(3*NE)$ de cada elemento (como son elementos de tensión constante se suponen situadas en su c.d.g). Estas tensiones constantes del elemento se acumulan en cada uno de sus 3 nudos para calcular las tensiones nodales promediadas entre los elementos adyacentes y se almacenan a continuación en el vector $REAC(3*NN)$.

Una vez recorrido el bucle que incluye todos los elementos de la estructura se inicia otro, que se extiende al número de nudos NN para finalizar el cálculo del promedio al dividir las 3 REAC correspondientes al nudo I-ésimo por el número de elementos que inciden en él, valor dado por la variable - NODES(I). El valor de las tensiones en cada elemento se deduce fácilmente de las expresiones:

$$\text{on } \underline{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_{3 \times 1} \quad ,, \quad \underline{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix}_{3 \times 3} \quad ,, \quad \underline{B} = \frac{1}{2A} \begin{pmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & a_2 & 0 & a_3 \\ a_1 & b_1 & a_2 & b_2 & a_3 & b_3 \end{pmatrix}_{3 \times 6}$$

$\underline{U} = \{u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3\}^T$, siendo N_1, N_2, N_3 los índices de los vértices 1, 2, 3 del elemento en cuestión



Por tanto

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = Cte \cdot \begin{pmatrix} b_1 & \nu a_1 & b_2 & \nu a_2 & b_3 & \nu a_3 \\ \nu b_1 & a_1 & \nu b_2 & a_2 & \nu b_3 & a_3 \\ \frac{1-\nu}{2} a_1 & \frac{1-\nu}{2} b_1 & \frac{1-\nu}{2} a_2 & \frac{1-\nu}{2} b_2 & \frac{1-\nu}{2} a_3 & \frac{1-\nu}{2} b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = Cte \cdot \begin{Bmatrix} b_1 u_1 + b_2 u_2 + b_3 u_3 + \nu (a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3) \\ \nu (b_1 u_1 + b_2 u_2 + b_3 u_3) + a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 \\ \frac{1-\nu}{2} (a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 + b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3) \end{Bmatrix} \quad ,, \quad Cte = \frac{E}{2A(1-\nu^2)}$$

```
C
C *****
C SUBROUTINE TENS(CON,PROP,FORC,REAC,X,Y,VC,NODES)
C *****
C
C CALCULO DE TENSIONES EN EL ELEMENTO
C
C COMMON MGD,MBAN,NGLE,NN,NE,NNC,NNB,NGLN,NNE,NGDL,NBAN,IN,IO,E,
*ANU
C DIMENSION CON(*),PROP(*),FORC(*),REAC(*),X(*),Y(*),VC(*),A(3),
*B(3),NODES(*)
C
C NEL = NUMERO DEL ELEMENTO
C N1,N2,N3 = NUDOS DEL ELEMENTO
C D1,D2,D3 = LONGITUDES DE LOS LADOS DEL ELEMENTO
C
C DO 100 NEL=1,NE
C L=NNE*(NEL-1)
C N1=CON(L+1)
C N2=CON(L+2)
C N3=CON(L+3)
C
C AREA = AREA DEL ELEMENTO
C
C B(1)=Y(N2)-Y(N3)
C B(2)=Y(N3)-Y(N1)
C B(3)=Y(N1)-Y(N2)
C A(1)=X(N3)-X(N2)
C A(2)=X(N1)-X(N3)
C A(3)=X(N2)-X(N1)
C AREA=(B(1)*A(2)-B(2)*A(1))/2.
C
C DO 1 I=1,3
C A(I)=A(I)/(2.*AREA)
1 B(I)=B(I)/(2.*AREA)
C
C CALCULA TENSIONES EN EL ELEMENTO NEL
C
C ANUP=(1.-ANU)/2.
C K1=NGLN*(N1-1)
C K2=NGLN*(N2-1)
C K3=NGLN*(N3-1)
C C=E/(1.-ANU**2)
C
C DEFORMACIONES
C
C L=3*(NEL-1)
C EPSX=B(1)*VC(K1+1)+B(2)*VC(K2+1)+B(3)*VC(K3+1)
C EPSY=A(1)*VC(K1+2)+A(2)*VC(K2+2)+A(3)*VC(K3+2)
C DUDY=A(1)*VC(K1+1)+A(2)*VC(K2+1)+A(3)*VC(K3+1)
C DVDX=B(1)*VC(K1+2)+B(2)*VC(K2+2)+B(3)*VC(K3+2)
C GAMAXY=DUDY+DVDX
```

```
C
C      TENSIONES
C
      FORC(L+1)=C*(EPSX+ANU*EPSY)
      FORC(L+2)=C*(EPSY+ANU*EPSX)
      FORC(L+3)=C*ANUP*GAMAXY
      DUDY=A(1)*VC(K1+1)+A(2)*VC(K2+1)+A(3)*VC(K3+1)
C
C      CALCULA LAS TENSIONES NODALES PROMEDIADAS, EN EL VECTOR REAC

      K1=3*(N1-1)
      K2=3*(N2-1)
      K3=3*(N3-1)
      DO 50 I=1,3
      L1=K1+I
      L2=K2+I
      L3=K3+I
      L4=L+I
      REAC(L1)=REAC(L1)+FORC(L4)
      REAC(L2)=REAC(L2)+FORC(L4)
50  REAC(L3)=REAC(L3)+FORC(L4)
C
C      EN EL VECTOR NODES SE ALMACENA EL NUMERO DE ELEMEN-
      TOS CONECTADOS A CADA NUDO

      NODES(N1)=NODES(N1)+1
      NODES(N2)=NODES(N2)+1
100  NODES(N3)=NODES(N3)+1
      DO 150 I=1,NN
      K1=3*I-2
      K2=K1+2
      DO 150 J=K1,K2
150  REAC(J)=REAC(J)/NODES(I)
      RETURN
      END
```

La expresión anterior permite obtener las tres componentes del tensor de tensión que es constante en el elemento. (Ver listado 7.1).

Un resultado que debe incluirse en este caso de tensión plana son las tensiones principales y la dirección de los planos en que actúan, valores que se calculan mediante las conocidas expresiones:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{2 \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\right)$$

Como resultado final y de gran importancia para deducir una estimación sobre la precisión y convergencia del MEF es el cálculo de la energía potencial total del sistema que viene dada por la expresión:

$$\pi = \frac{1}{2} \underline{U}^T \underline{K} \underline{U} - \underline{U}^T \underline{F}$$

que por ser mínima implica la condición $\frac{\partial \pi}{\partial \underline{U}} = 0$

esto es $\underline{K} \underline{U} = \underline{F}$

con lo que $\pi = -\frac{1}{2} \underline{U}^T \cdot \underline{F}$

es decir, la mitad del trabajo exterior. Desde el punto de vista de la programación y en este caso particular, dado que el vector de fuerzas \underline{F} se destruye en el proceso de resolución del sistema al almacenar en su lugar precisamente los desplazamientos nodales \underline{U} , el cálculo de la energía puede hacerse a partir de la expresión cuadrática:

$$\pi = -\frac{1}{2} \bar{U}^T \bar{K} \bar{U}$$

$(1 \times N_{GDL}) \quad (N_{GDL} \times N_{GDL}) \quad (N_{GDL} \times 1)$

cuya programación FORTRAN puede ser así:

```
ENERG = 0
DØ 1 I = 1,NGDL
DØ 1 J = 1,NGDL
1 F(I) = K(I,J)*U(J)
DØ 2 I = 1,NGDL
2 ENERG = ENERG(I)*U(I)
ENERG = ENERG/2
```

Posteriormente se harán las correspondientes correcciones para situar en lugar de K la matriz de rigidez simétrica y en banda. Se dimensionará F(NGDL) y se tendrá en cuenta que U está almacenado realmente en VC.

7.4.- SUBROUTINAS DE SALIDA DE RESULTADOS

En estas rutinas se incluyen únicamente sentencias de escritura en los formatos más adecuados, de los resultados deseados como son los desplazamientos nodales, las tensiones $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ constantes en cada elemento y estas mismas componentes promedidas en los nudos.

La codificación de esta rutina en lenguaje FORTRAN es inmediata tal como se muestra en la hoja que sigue. Asimismo se presenta la salida de resultados del ejemplo considerado de prueba a lo largo de este curso.

Evidentemente esta parte de un programa de elementos finitos, es como la entrada, de un interes excepcional en las aplicaciones industriales. En efecto,

en un problema estructural de gran tamaño, el volumen de resul
tados precisos de interpretación y reducción adecuada, exige
un esfuerzo inmenso en horas-hombre cualificado. Es por lo tan
to, necesario en estas situaciones la utilización de programas
de elaboración de resultados (postprocesadores), que los pre-
senten en forma más intuitiva para el analísta. Gráficas (cur
vas de nivel, deformadas, etc), indicadores de zonas sensibles
máximo y mínimo, combinación de hipótesis, etc, son algunos de
los numerosos recursos que son susceptibles de ser utilizados.
Su programación y desarrollo no cabe dentro del carácter ele-
mental de este curso, y su exposición sería mas adecuada ya -
dentro del contexto dedicado al diseño asistido por computador.

Se espera que las numerosas posibilidades de aplicación del
MEF, algunas contempladas aquí, constituyan el mayor incenti
vo para continuar el estudio que se ha iniciado mediante la
redacción del programa elemental expuesto en este curso.

```
C *****
SUBROUTINE OUTPUT (VC, FORC, REAC)
C *****

COMMON MGD, MBAN, NGLE, NN, NE, NNC, NNB, NGLN, NNE, NGDL, NBAN, IN, IO, E, G
DIMENSION VC(*), REAC(*), FORC(*)

C
C IMPRIME LOS DESPLAZAMIENTOS NODALES

WRITE (IO, 1)
1 FORMAT (//1X, 75('*')) // ' R E S U L T A D O S ' // ' DESPLAZAMIENTOS',
  * /1X, 'NUDO', 8X, 'U', 13X, 'V')
DO 10 I=1, NN
  K1=NGLN*(I-1)+1
  K2=K1+NGLN-1
10 WRITE (IO, 2) I, (VC(J), J=K1, K2)
2 FORMAT (I3, 6(2X, E11.4))

C
C IMPRIME TENSIONES DEL ELEMENTO
C
WRITE (IO, 3)
3 FORMAT (' T E N S I O N E S ' /1X, 'ELEM', 4X, 'SIGMAX', 6X,
  * 'SIGMAY', 7X, 'TAUXY', 6X, 'SIGMA1', 6X, 'SIGMA2', 8X, 'ALFA')
DO 20 I=1, NE
  K1=3*(I-1)+1
  K2=K1+2
  SX=FORC(K1)
  SY=FORC(K1+1)
  TXY=FORC(K2)
  S1=(SX+SY)/2. + SQRT(((SX-SY)/2.)*2 + TXY*2)
  S2=SX+SY-S1
  ALFA=0.
  IF (ABS(SX-SY).LE.0.001) GOTO 20
  ALFA=0.5*ATAN(2.*TXY/(SX-SY))*59.29578
20 WRITE (IO, 4) I, (FORC(J), J=K1, K2), S1, S2, ALFA
4 FORMAT (I3, 6(2X, F10.2))

C
C IMPRIME TENSIONES PROMEDIADAS EN LOS NUDOS
C
WRITE (IO, 6)
6 FORMAT (' TENSIONES NODALES PROMEDIADAS' /1X, 'NUDO', 4X, 'SIGMAX',
  * 6X, 'SIGMAY', 7X, 'TAUXY', 6X, 'SIGMA1', 6X, 'SIGMA2', 8X, 'ALFA')
DO 30 I=1, NN
  K1=3*(I-1)+1
  K2=K1+2
  SX=REAC(K1)
  SY=REAC(K1+1)
  TXY=REAC(K2)
  S1=(SX+SY)/2. + SQRT(((SX-SY)/2.)*2 + TXY*2)
  S2=SX+SY-S1
  ALFA=0.
  IF (ABS(SX-SY).LE.0.001) GOTO 30
  ALFA=0.5*ATAN(2.*TXY/(SX-SY))*59.29578
30 WRITE (IO, 4) I, (REAC(J), J=K1, K2), S1, S2, ALFA
WRITE (IO, 5)
5 FORMAT (//1X, 76('*'))
RETURN
END
```

R E S U L T A D O S

DESPLAZAMIENTOS

NUDO	U	V
1	.1000E-02	.0000E+00
2	.9124E-03	.1385E-02
3	.9579E-03	.3448E-02
4	.5570E-03	.3449E-02
5	.2320E-03	.1370E-02
6	.0000E+00	.8944E-04
7	.0000E+00	.3085E-04

T E N S I O N E S

ELEM	SIGMAX	SIGMAY	TAUXY	SIGMA1	SIGMA2	ALFA
1	-90.32	205.53	-175.88	287.42	-172.21	25.84
2	-181.29	-95.28	-267.93	133.08	-409.64	41.85
3	58.89	-47.24	226.44	238.40	-226.75	39.75
4	-117.78	-18.85	47.11	.00	-136.63	-22.56
5	316.77	-156.35	781.74	896.96	-736.54	37.86

TENSIONES NODALES PROMEDIADAS

NUDO	SIGMAX	SIGMAY	TAUXY	SIGMA1	SIGMA2	ALFA
1	-90.32	205.53	-175.88	287.42	-172.21	25.84
2	-70.91	21.00	-72.46	60.85	-110.75	29.81
3	-29.45	-33.04	136.78	105.54	-168.03	46.18
4	-117.78	-18.85	47.11	.00	-136.63	-22.56
5	19.15	-79.43	196.84	172.78	-233.06	39.30
6	15.05	-15.37	112.64	113.51	-113.82	42.59
7	316.77	-156.35	781.74	896.96	-736.54	37.86

FIGURA 7.5.- Salida de resultados.

APENDICE A.- PROGRAMA EN LENGUAJE BASIC

A.1.- INTRODUCCION

En este apéndice se incluye el listado en lenguaje BASIC del programa de computador que resuelve miente la técnica de Elementos Finitos, problemas de elasticidad bidimensional.

Este programa como puede comprobarse es una mera traducción del escrito en lenguaje FORTRAN el cual se ha analizado ampliamente a lo largo del libro. (*)

Hay que destacar que de no disponer de compilador BASIC, el programa no se ejecuta directamente en lenguaje máquina, lo que supone unos tiempos de ejecución desorbitados, aunque en estos casos se requiere muy poca capacidad de memoria para resolver los mismos problemas.

Evidentemente un programa de EF debe ejecutarse en lenguaje máquina dada la gran cantidad de operaciones y su carácter repetitivo. Actualmente los pequeños ordenadores personales empiezan a disponer de compiladores BASIC que le harán competitivo con el lenguaje FORTRAN para el tratamiento de estos problemas de EF. Tengase además en cuenta la comodidad de depuración de programas que ofrecen la mayoría de los sistemas BASIC.

NOTA(*): Hay que hacer notar que si bien las sentencias de los dos tipos de lenguajes son parecidas, existen diferencias esenciales en la forma de llamada a las rutinas y en las sentencias que especifican áreas comunes de memoria, lo que debía de ser motivo para que el programa en BASIC tuviera otra organización que la utilizada en lenguaje FORTRAN.

A.2.- LISTADO DEL PROGRAMA EN LENGUAJE BASIC

```
10 REM
20 REM          *****
30 REM          PROGRAMA PRINCIPAL
40 REM          *****
50 REM
60      DIM X(100),Y(100),CON(300),PROP(100),IB(60),RIG(200,40)
70      DIM VC(200),FORC(300),REAC(300),RIGEL(6,6),V(40),NODES(100)
110 REM
120 REM -INICIALIZACION DE LOS PARAMETROS DEL PROGRAMA
130 REM
140 REM     MGDL = NUMERO DE FILAS DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ
150 REM     MBAN = SEMIANCHO DE BANDA
160 REM     NGLN = NUMERO DE GDL POR NUDO
170 REM     NNE  = NUMERO DE NUDOS POR ELEMENTO
180 REM     NGLE = NUMERO DE GDL PARA UN ELEMENTO
190 REM
200     MGDL=200
210     MBAN=40
220     NGLN=2
230     NNE=3
240     NGLE=NGLN*NNE
250 REM
260 REM     PASOS DEL PROGRAMA
270 REM -----
280 REM
290 REM -ENTRADA DE DATOS
300 REM
310     GOSUB 2000
320 REM
330 REM -ENSAMBLAJE DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ
340 REM
350     GOSUB 5000
360 REM
370 REM -INTRODUCCION DE LAS CONDICIONES DE BORDE
380 REM
390     GOSUB 8000
400 REM
410 REM -SOLUCION DEL SISTEMA DE ECUACIONES
420 REM
430     GOSUB 9000
440 REM
450 REM -CALCULO DE LAS TENSIONES
460 REM
470     GOSUB 10000
480 REM
490 REM -SALIDA DE RESULTADOS
500 REM
510     GOSUB 12000
520 REM
530     END
540 REM
```

```
2000 REM
2010 REM          *****
    20 REM          SUBROUTINE INPUT
    30 REM          *****
2040 REM
2050      DIM W(3),IC(3)
    90 REM
    00 REM      W = VECTOR AUXILIAR PARA ALMACENAR TEMPORALMENTE LAS
    10 REM          CARGAS NODALES Y LOS VALORES DE LAS INCOGNITAS
2120 REM          PRESCRITAS
2130 REM
    40 REM      IC =VECTOR AUXILIAR PARA ALMACENAR LA CONECTIVIDAD DE UN
    50 REM          ELEMENTO Y EL ESTADO DE LOS INDICADORES DE BORDE
    60 REM
2170 REM      LECTURA DE LOS PARAMETROS BASICOS
2180 REM
    90 REM      NN = NUMERO DE NUDOS
    00 REM      NE = NUMERO DE ELEMENTOS
    10 REM      NNC= NUMERO DE NUDOS CARGADOS
2220 REM      NNB= NUMERO DE NUDOS DE BORDE
    30 REM      E = MODULO DE ELASTICIDAD
    40 REM
    50      PRINT
2260      PRINT "*****"
2270      PRINT "E N T R A D A   D E   D A T O S"
    80      PRINT "*****"
    90      PRINT
    00      PRINT "D A T O S   G E N E R A L E S"
2310      PRINT
2320      INPUT "NUMERO DE NUDOS = ",NN
    30      INPUT "NUMERO DE ELEMENTOS = ",NE
    40      INPUT "NUMERO DE NUDOS CARGADOS = ",NNC
    50      INPUT "NUMERO DE NUDOS DE BORDE = ",NNB
2360      INPUT "MODULO DE ELASTICIDAD = ",E
2370      INPUT "COEFICIENTE DE POISSON = ",G
    2 30 REM
    2 70 REM      LECTURA DE COORDENADAS NODALES
    2 00 REM
2410      PRINT
    20      PRINT " C O O R D E N A D A S   N O D A L E S "
    30      PRINT
    40      PRINT "NUDO","X","Y"
2450      FOR I=1 TO NN
2460      INPUT J,X(J),Y(J)
    2 0      NEXT I
    2 0 REM
    2 0 REM      LECTURA DE LA CONECTIVIDAD ELEMENTAL EN CONJUNTO "CON"
2500 REM      Y ESPESOR DEL ELEMENTO EN EL CONJUNTO "PROP"
2510 REM
    2 0      PRINT
    2 0      PRINT "C O N E X I O N   E L E M E N T A L "
    2 0      PRINT
2550      PRINT "ELEMENTO","NUDO I","NUDO J","NUDO K","ESPESOR"
2560      FOR J=1 TO NE
    2 0      INPUT I,IC(1),IC(2),IC(3),PROP(I)
    2 0      N1= NNE*(I-1)
    2 0      CON(N1+1)=IC(1)
2600      CON(N1+2)=IC(2)
```

```
2610      CON(N1+3)=IC(3)
2620      NEXT J
2630 REM
2640 REM      CALCULA NUMERO REAL DE INCOGNITAS NGDL
2650 REM
2660      NGDL=NN*NGLN
2670 REM
2680 REM      LEE CARGAS NODALES Y LAS ALMACENA EN VC
2690 REM
2700      PRINT
2710      PRINT "C A R G A S   N O D A L E S : "
2720      PRINT
2730      PRINT "NUDO", "FX", "FY"
2740      FOR I=1 TO NNC
2750      INPUT J, W(1), W(2)
2760      FOR K=1 TO NGLN
2770      L=NGLN*(J-1)+K
2780      VC(L)=W(K)
2790      NEXT K
2800      NEXT I
2810 REM
2820 REM      LEE DATOS NUDOS DE BORDE. ALMACENA LOS INDICADORES DE
2830 REM      BORDE EN IB, Y , LAS INCOGNITAS PRESCRITAS EN REAC.
2840 REM
2850      PRINT
2860      PRINT "N U D O S   D E   B O R D E "
2870      PRINT
2880      PRINT " NUDO", "IB(U)", "IB(V)", "u", "v"
2890      FOR I=1 TO NNB
2900      INPUT J, IC(1), IC(2), W(1), W(2)
2910      L1=(NGLN+1)*(I-1)+1
2920      L2=NGLN*(J-1)
2930      IB(L1)=J
2940      FOR K=1 TO NGLN
2950      N1=L1+K
2960      N2=L2+K
2970      IB(N1)=IC(K)
2980      REAC(N2)=W(K)
2990      NEXT K
3000      NEXT I
3010 REM
3020 REM      IMPRESION DE DATOS DE ENTRADA
3030 REM
3040      PRINT
3050      PRINT
3060      PRINT "*****"
3070      PRINT "C H E Q U E O   D E   D A T O S "
3080      PRINT "*****"
3090      PRINT
3100      PRINT "D A T O S   G E N E R A L E S "
3110      PRINT
3120 REM
3130      PRINT "NUMERO DE NUDOS = ", NN
3140      PRINT "NUMERO DE ELEMENTOS = ", NE
3150      PRINT "NUMERO DE NUDOS CARGADOS = ", NNC
3160      PRINT "NUMERO DE NUDOS DE BORDE = ", NNB
3170      PRINT "MODULO DE ELASTICIDAD = ", E
3180      PRINT "COEFICIENTE DE POISSON = ", G
3190 REM
```

```
3200 PRINT
3210 PRINT "C O O R D E N A D A S   N O D A L E S"
3220 PRINT
3230 REM
3240 PRINT "NUDO","X","Y"
3250 FOR I=1 TO NN
3260 PRINT I,X(I),Y(I)
3270 NEXT I
3280 REM
3290 PRINT
3300 PRINT "C O N E X I O N   E L E M E N T A L"
3310 PRINT
3320 PRINT "ELEM","NUDO I","NUDO J","NUDO K","ESPESOR"
3330 FOR J=1 TO NE
3340 N1=NNE*(J-1)
3350 PRINT J,CON(N1+1),CON(N1+2),CON(N1+3),PROP(J)
3360 NEXT J
3370 RETURN
5000 REM
5010 REM
5020 REM
5030 REM
5040 REM
5050 REM
5060 REM
5110 REM
5120 REM
5130 REM
5140 N1=NNE-1
5150 NBAN=0
5160 FOR I=1 TO NE
5170 L1=NNE*(I-1)
5180 FOR J=1 TO N1
5190 L2=L1+J
5200 J1=J+1
5210 FOR K=J1 TO NNE
5220 L3=L1+K
5230 L=ABS(CON(L2)-CON(L3))
5240 IF NBAN>=L THEN GOTO 5260
5250 NBAN=L
5260 NEXT K
5270 NEXT J
5280 NEXT I
5290 NBAN=NGLN*(NBAN+1)
5300 REM
5310 REM
5320 REM
5330 FOR NEL=1 TO NE
5340 REM
5350 REM
5360 REM
5370 GOSUB 6000
5380 REM
5390 REM
5400 REM
5410 GOSUB 7000
5420 REM
5430 NEXT NEL
5440 RETURN
```

```
6000 REM
6010 REM          *****
6020 REM          SUBROUTINE RIGID
6030 REM          *****
6040 REM
6050 REM          CALCULA LA MATRIZ DE RIGIDEZ ELEMENTAL
6060 REM
6070 REM
6080 REM
6090 REM
6100 REM          NEL          =NUMERO DEL ELEMENTO
6110 REM
6120 REM          N1,N2,N3 = INDICES DE LOS NUDOS DEL ELEMENTO
6130 REM
6140 REM
6150          L=NNE*(NEL-1)+1
6160          N1=CON(L)
6170          N2=CON(L+1)
6180          N3=CON(L+2)
6190 REM
6200 REM          DEFINICION DE COORDENADAS TRIANGULARES
6210 REM
6220          B(1)=Y(N2)-Y(N3)
6230          B(2)=Y(N3)-Y(N1)
6240          B(3)=Y(N1)-Y(N2)
6250          A(1)=X(N3)-X(N2)
6260          A(2)=X(N1)-X(N3)
6270          A(3)=X(N2)-X(N1)
6280          AREA=(B(1)*A(2)-B(2)*A(1))/2
6290 REM
6300          ALA=E*PROP(NEL)*AREA/(1-G*G)/(4*AREA^2)
6310          AX=(1-G)/2
6320 REM
6330 REM          CALCULA MATRIZ DE RIGIDEZ ELEMENTAL
6340 REM
6350          FOR I=1 TO 6
6360          FOR J=1 TO 6
6370          RIGEL(I,J)=0
6380          NEXT J
6390          NEXT I
6400          FOR I=1 TO 3
6410          IX=(I-1)*2+1
6420          IZ=(I-1)*2+2
6430          FOR J=1 TO 3
6440          JX=(J-1)*2+1
6450          JZ=(J-1)*2+2
6460          RIGEL(IX,JX)=(B(I)*B(J)+AX*A(I)*A(J))*ALA
6470          RIGEL(IZ,JZ)=(A(I)*A(J)+AX*B(I)*B(J))*ALA
6480          RIGEL(IX,JZ)=(G*B(I)*A(J)+AX*A(I)*B(J))*ALA
6490          RIGEL(IZ,JX)=(G*A(I)*B(J)+AX*B(I)*A(J))*ALA
6500          NEXT J
6510          NEXT I
6520          RETURN
7000 REM
7010 REM          *****
7020 REM          SUBROUTINE ELENS
7030 REM          *****
7040 REM
7050 REM          ESTA RUTINA ENSAMBLA LA MATRIZ DE RIGIDEZ ELEMENTAL -
7060 REM          EN LA GLOBAL
7070 REM
7080 REM
7090 REM
7100 REM
7110 REM          NEL = NUMERO DEL ELEMENTO
7120 REM
7130 REM          N1  = NUMERO DEL NUDO INICIAL
7140 REM          N2  = NUMERO DEL NUDO FINAL
```

```
7150 REM
7160 L1=NNE*(NEL-1)
70 FOR I=1 TO NNE
80 L2=L1+I
90 N1=CON(L2)
7200 I1=NGLN*(I-1)
7210 J1=NGLN*(N1-1)
20 FOR J=I TO NNE
30 L2=L1+J
40 N2=CON(L2)
7250 I2=NGLN*(J-1)
7260 J2=NGLN*(N2-1)
70 FOR K=1 TO NGLN
80 KI=1
7290 IF N1=N2 THEN GOTO 7340
7300 IF N1<N2 THEN GOTO 7380 ELSE GOTO 7450
10 REM
20 REM ALMACENA SUBMATRIZ NODAL DIAGONAL
30 REM
7340 KI=K
7350 REM
60 REM ALMACENA SUBMATRIZ NODAL
70 REM
80 IR=I1+K
7390 JR=J1+K
7400 IK=J2-JR+1
10 GOTO 7480
20 REM
30 REM ALMACENA TRANSPUESTA DE SUBMATRIZ NODAL
7440 REM
7450 IC=I2+K
50 JR=J2+K
70 IK=J1-JR+1
7480 FOR L=KI TO NGLN
7490 JC=IK+L
7 00 IF N1<=N2 THEN GOTO 7510 ELSE GOTO 7530
7 10 IC=I2+L
7 20 GOTO 7540
7530 IR=I1+L
7540 RIG(JR,JC)=RIG(JR,JC)+RIGEL(IR,IC)
7 30 NEXT L
7 50 NEXT K
7 70 NEXT J
7580 NEXT I
7590 RETURN
8 00 REM
8 10 REM *****
8 20 REM SUBROUTINE BORDE
8030 REM *****
8040 REM
8 50 REM INTRODUCCION DE LAS CONDICIONES DE CONTORNO
8 50 REM
8.00 REM
8110 FOR L=1 TO NNB
8120 REM
8 30 REM NO = NUMERO DEL NUDO CON CONDICION DE BORDE
8 40 REM
8150 L1=(NGLN+1)*(L-1)+1
8160 NO=IB(L1)
8 70 K1=NGLN*(NO-1)
```

```
8180      FOR I=1 TO NGLN
8190      L2=L1+I
8200      IF IB(L2)=1 GOTO 8280 ELSE GOTO 8470
8210 REM
8220 REM
8230 REM      INCOGNITAS PRESCRITAS A SER CONSIDERADAS
8240 REM
8250 REM      COEFICIENTES DIAGONAL DE RIG=1
8260 REM      SITUAR VALORES DE INCOGNITAS PRESCRITAS EN VC
8270 REM
8280      KR=K1+I
8290      FOR J=2 TO NBAN
8300      KV=KR+J-1
8310      IF NGDL<KV GOTO 8370 ELSE GOTO 8350
8320 REM
8330 REM      MODIFICA FILA DE RIG Y CORRESPONDIENTE ELEMENTO EN VC
8340 REM
8350      VC(KV)=VC(KV)-RIG(KR,J)*REAC(KR)
8360      RIG(KR,J)=0
8370      KV=KR-J+1
8380      IF KV>0 GOTO 8420 ELSE GOTO 8440
8390 REM
8400 REM      MODIFICA COLUMNA DE RIG Y CORRESPONDIENTE ELEMENTO EN VC
8410 REM
8420      VC(KV)=VC(KV)-RIG(KV,J)*REAC(KR)
8430      RIG(KV,J)=0
8440      NEXT J
8450      RIG(KR,1)=1
8460      VC(KR)=REAC(KR)
8470      NEXT I
8480      NEXT L
8490      RETURN
9000 REM
9010 REM      *****
9020 REM      SUBROUTINE SOLVE
9030 REM      *****
9040 REM
9050 REM      SOLUCION DE UN SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES POR EL
9060 REM      METODO DE ELIMINACION DE GAUSS, PARA SISTEMAS SIMETRI -
9070 REM      COS Y EN BANDA
9080 REM
9090 REM      RIG = CONTIENE LA MATRIZ TRIANGULAR SUPERIOR, ALMACENA-
9100 REM      DO DE ACUERDO AL ESQUEMA SIMETRICO Y BANDEADO
9110 REM      VC = ORIGINALMENTE CONTIENE LOS TERMINOS INDEPENDIEN -
9120 REM      TES; DESPUES DE RESUELTO EL SISTEMA CONTIENE LOS
9130 REM      VALORES DE LAS INCOGNITAS HALLADAS
9140 REM
9150 REM      NGDL = NUMERO DE INCOGNITAS
9160 REM      NBAN = SEMIANCHO DE BANDA
9170 REM      MGDL = NUMERO MAXIMO DE FILAS DE RIG Y VC
9180 REM      MBAN = NUMERO MAXIMO DE COLUMNAS DE RIG
9190 REM      V    = VECTOR AUXILIAR
9200 REM
9240      N1=NGDL-1
9250      FOR K=1 TO N1
9260      C=RIG(K,1)
9270      K1=K+1
9280      IF ABS(C)>0.000001 THEN GOTO 9340
9290      PRINT "SINGULARIDAD EN LA FILA",K
9300      GOTO 9760
```



```
9310 REM
9320 REM   DIVIDE FILA POR ELEMENTO DIAGONAL
9330 REM
9340   NI=K1+NBAN-2
9350   IF NI>NGDL THEN L=NGDL ELSE L=NI
9360   FOR J=2 TO NBAN
9370     V(J)=RIG(K,J)
9380   NEXT J
9390   FOR J=K1 TO L
9400     K2=J-K+1
9410     RIG(K,K2)=RIG(K,K2)/C
9420   NEXT J
9430   VC(K)=VC(K)/C
9440 REM
9450 REM   ELIMINA LA INCOGNITA X(K) PARA FILA I
9460 REM
9470   FOR I=K1 TO L
9480     K2=I-K1+2
9490     C=V(K2)
9500     FOR J=I TO L
9510       K2=J-I+1
9520       K3=J-K+1
9530       RIG(I,K2)=RIG(I,K2)-C*RIG(K,K3)
9540     NEXT J
9550     VC(I)=VC(I)-C*VC(K)
9560   NEXT I
9570 NEXT K
9580 REM
9590 REM   CALCULA ULTIMA INCOGNITA
9600 REM
9610   IF ABS(RIG(NGDL,1))<=.000001 THEN GOTO 9290
9620   VC(NGDL)=VC(NGDL)/RIG(NGDL,1)
9630 REM
9640 REM   RESUSTITUCION (CALCULO INCOGNITAS RESTANTES)
9650 REM
9660   FOR I=1 TO N1
9670     K=NGDL-I
9680     K1=K+1
9690     NI=K1+NBAN-2
9700     IF NI>NGDL THEN L=NGDL ELSE L=NI
9710     FOR J=K1 TO L
9720       K2=J-K+1
9730       VC(K)=VC(K)-RIG(K,K2)*VC(J)
9740     NEXT J
9750   NEXT I
9800   RETURN
10000 REM
10010 REM   *****
10020 REM   SUBROUTINE TENS
10030 REM   *****
10040 REM
10050 REM   CALCULO DE TENSIONES EN EL ELEMENTO
10060 REM
10070 REM   DIM A(3),B(3)
10080 REM
10090 REM   NEL = NUMERO DEL ELEMENTO
10100 REM   N1,N2,N3 = NUDOS DEL ELEMENTO
10110 REM   D1,D2,D3 = LONGITUDES DE LOS LADOS DEL ELEMENTO
10120 REM
```

```

10130      FOR NEL=1 TO NE
10140      L=NNE*(NEL-1)
10150      N1=CON(L+1)
10160      N2=CON(L+2)
10170      N3=CON(L+3)
10180 REM
10190 REM      AREA = AREA DEL ELEMENTO
10200 REM
10210      B(1)=Y(N2)-Y(N3)
10220      B(2)=Y(N3)-Y(N1)
10230      B(3)=Y(N1)-Y(N2)
10240      A(1)=X(N3)-X(N2)
10250      A(2)=X(N1)-X(N3)
10260      A(3)=X(N2)-X(N1)
10270      AREA=(B(1)*A(2)-B(2)*A(1))/2
10280 REM
10290      FOR I=1 TO 3
10300      A(I)=A(I)/(2*AREA)
10310      B(I)=B(I)/(2*AREA)
10320      NEXT I
10330 REM
10340 REM      CALCULA TENSIONES EN EL ELEMENTO NEL
10350 REM
10360      ANUP=(1-G)/2
10370      K1=NGLN*(N1-1)
10380      K2=NGLN*(N2-1)
10390      K3=NGLN*(N3-1)
10400      C=E/(1-G^2)
10410      L=3*(NEL-1)
10420      FORC(L+1)=C*(B(1)*VC(K1+1)+B(2)*VC(K2+1)+B(3)*VC(K3+1)+
          G*(A(1)*VC(K1+2)+A(2)*VC(K2+2)+A(3)*VC(K3+2)))
10430      FORC(L+2)=(G*(B(1)*VC(K1+1)+B(2)*VC(K2+1)+B(3)*VC(K3+1))
          +A(1)*VC(K1+2)+A(2)*VC(K2+2)+A(3)*VC(K3+2))*C
10440      FORC(L+3)=(A(1)*VC(K1+1)+A(2)*VC(K2+1)+A(3)*VC(K3+1)+
          B(1)*VC(K1+2)+B(2)*VC(K2+2)+B(3)*VC(K3+2))*C*(1-G)/2
10450 REM
10460 REM      CALCULA LAS TENSIONES NODALES PROMEDIADAS, EN REAC
10470 REM
10480      K1=3*(N1-1)
10490      K2=3*(N2-1)
10500      K3=3*(N3-1)
10510      FOR I=1 TO 3
10520      L1=K1+I
10530      L2=K2+I
10540      L3=K3+I
10550      L4=L+I
10560      REAC(L1)=REAC(L1)+FORC(L4)
10570      REAC(L2)=REAC(L2)+FORC(L4)
10580      REAC(L3)=REAC(L3)+FORC(L4)
10590      NEXT I
10600 REM
10610 REM      EN EL VECTOR NODES SE ALMACENA EL NUMERO DE ELE -
10620 REM      MENTOS CONECTADOS A CADA NUDO
10630 REM
10640      NODES(N1)=NODES(N1)+1
10650      NODES(N2)=NODES(N2)+1
10660      NODES(N3)=NODES(N3)+1
10670      NEXT NEL
10680      FOR I=1 TO NN
10690      K1=3*I-2

```

```
10700      K2=K1+2
   710      FOR J=K1 TO K2
   720      REAC(J)=REAC(J)/NODES(I)
   730      NEXT J
10740      NEXT I
   750      RETURN
   000 REM
   010 REM          *****
12020 REM          SUBROUTINE OUTPUT
12030 REM          *****
   040 REM
   050 REM
   060 REM      IMPRIME LOS DESPLAZAMIENTOS NODALES
12070 REM
12080      PRINT
   085      PRINT "*****"
   090      PRINT " R E S U L T A D O S "
   100      PRINT "*****"
12110      PRINT
12120      PRINT " D E S P L A Z A M I E N T O S "
   125      PRINT "*****"
   126      PRINT
   130      PRINT "NUDO", "U", "V"
12140      PRINT
   150      FOR I=1 TO NN
   160      K1=NGLN*(I-1)+1
   170      K2=K1+NGLN-1
12180      PRINT I, VC(K1), VC(K2)
12190      NEXT I
   200 REM
   340 REM
   350 REM      IMPRIME TENSIONES DEL ELEMENTO
12360 REM
12365      PRINT
   370      PRINT " T E N S I O N E S "
   376      PRINT "*****"
   380      PRINT "ELEMENTO" , "SIGMAX" , "SIGMAY", "TAUXY"
12385      PRINT
12390      FOR I=1 TO NE
   400      K1=3*(I-1)+1
   410      K2=K1+2
   420      PRINT I, FORC(K1), FORC(K1+1), FORC(K2)
12430      NEXT I
12440 REM
   450 REM      IMPRIME TENSIONES PROMEDIADAS EN LOS NUDOS
   460 REM
   470      PRINT
12475      PRINT "T E N S I O N E S N O D A L E S P R O M E D I A D A S"
   476      PRINT "*****"
   477      PRINT
   480      PRINT "NUDO", "SIGMAX", "SIGMAY", "TAUXY"
12485      PRINT
12500      FOR I=1 TO NN
   510      K1=3*(I-1)+1
   520      K2=K1+2
   530      PRINT I, REAC(K1), REAC(K1+1), REAC(K2)
12540      NEXT I
12550      RETURN
```

A.3.- ESPECIFICACIONES DE ENTRADA DE DATOS Y SALIDA DE RESULTADOS (VARIABLES DEL PROGRAMA-DIMENSIONES Y LIMITACIONES)

Las variables que entran en juego a lo largo de este programa, escrito en lenguaje BASIC tienen idéntico significado, iguales dimensiones y están sujetas a las mismas limitaciones que las correspondientes al programa escrito en FORTRAN, y cuya organización y descripción se realizó en el apartado 2.5.

Así mismo la entrada de datos sigue el mismo orden que el dado para lenguaje FORTRAN en el apartado 4.1, si bien dejan de regir las especificaciones de formato dadas allí, utilizandose ahora el tipo de entrada más general dado por la sentencia INPUT de BASIC.

Por tanto los datos se darán en el siguiente orden:

1) Datos generales: NN, NE, NNC, NNB, E, G

con NN = Número de nudos.

NE = Número de elementos.

NNC= Número de nudos cargados.

NNB= Número de nudos de borde.

E = Módulo de elasticidad.

G = Coeficiente de Poisson.

2) Coordenadas de los nudos: I, X(I), Y(I)

con I = Índice del nudo.

X(I), Y(I) coordenadas del nudo I

Esta línea de entrada se repetirá NN veces.

3) Datos de los elementos: NEL, I, J, K, T

con NEL = Índice del elemento.

I, J, K = Índices de los nudos del elemento NEL dados en sentido
del eje OX positivo al OY positivo.

T = Espesor del elemento NEL.

Esta línea de entrada se repetirá NE veces.

4) Cargas en los nudos: I, FX, FY

con I = Índice del nudo cargado.

FX, FY = componentes según los ejes generales de la fuerza ac
tuante en I.

Se repetirá esta entrada NNC veces.

5) Condiciones de contorno: I, IB(u), IB(v), u, v

con I = Índice del nudo de borde.

IB(u) = 1 si la componente del desplazamiento del nudo I,
paralela al eje OX, está impuesta. En caso contra-
rio se pondrá un cero.

IB(v) = Idem respecto a la otra componente del desplazamiento.

u = valor del desplazamiento impuesto. Tiene lugar en caso de
que IB(u) = 1.

v = Idem respecto a la otra componente.

Esta entrada se repetiría NNB veces.

La salida de resultados es idéntica a la del programa en FORTRAN, salvo que en este caso no se han incluido las tensiones principales, que constituye un pequeño ejercicio de programación que se deja para el lector.

A.4.- EJEMPLO DE PRUEBA

Se incluye en este apartado un ejemplo de prueba que permitirá esclarecer lo comentado en el apartado anterior referente a la entrada de datos y salida de resultados.

Este ejemplo es el mismo que se ha seguido a lo largo del libro y vemos que se obtienen idénticos resultados que para el ejemplo ejecutado mediante el programa en FORTRAN, apesar de que el sistema BASIC utilizado tiene algo más de precisión que la simple del FORTRAN.

Se vuelve a insistir no obstante que estos resultados no tendrán nada que ver con los reales, dada la sencilla discretización realizada del dominio.

ENTRADA DE DATOS

DATOS GENERALES

NUMERO DE NUDOS = 7
NUMERO DE ELEMENTOS = 5
NUMERO DE NUDOS CARGADOS = 1
NUMERO DE NUDOS DE BORDE = 3
MODULO DE ELASTICIDAD = 3000000
COEFICIENTE DE POISSON = .2

COORDENADAS NODALES

NUDO	X	Y
1	0	0
2	2	0
3	4	0
4	4	.4
5	2	.8
6	0	1.2
7	0	2

CONEXION ELEMENTAL

ELEMENTO	NUDO I	NUDO J	NUDO K	ESPESOR
1	6	1	2	1
2	2	5	6	1
3	5	2	3	1
4	3	4	5	1
5	7	6	5	1

CARGAS NODALES :

NUDO	FX	FY
3	0	100

NUDOS DE BORDE

NUDO	IB(U)	IB(V)	u	v
1	1	1	.001	0
6	1	0	0	0
7	1	0	0	0

FIGURA A.1.- Datos de entrada.

R E S U L T A D O S

D E S P L A Z A M I E N T O S

NUDO	U	V
1	.001	0
2	9.123838E-04	1.385258E-03
3	9.579425E-04	3.448459E-03
4	5.569794E-04	3.449087E-03
5	2.320243E-04	1.369519E-03
6	0	8.943599E-05
7	0	3.084878E-05

T E N S I O N E S

ELEMENTO	SIGMAX	SIGMAY	TAUXY
1	-90.31908	205.5262	-175.8808
2	-181.2886	-95.27648	-267.9281
3	58.88986	-47.24061	226.4387
4	-117.7811	-18.84473	47.1127
5	316.7666	-156.3487	781.7434

T E N S I O N E S N O D A L E S P R O M E D I A D A S

NUDO	SIGMAX	SIGMAY	TAUXY
1	-90.31808	205.5262	-175.8808
2	-70.90593	21.00302	-72.4567
3	-29.44563	-33.04267	136.7757
4	-117.7811	-18.84473	47.1127
5	19.1467	-79.42763	196.8417
6	15.053	-15.36635	112.6449
7	316.7666	-156.3487	781.7434

FIGURA A.2.- Salida de resultados.